Analyse II — Série 4

EPFL – Sections SIE/GC — 13.03.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice <u>sans consulter vos notes de cours ou le corrigé</u>. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Construire un schéma représentant un ensemble A dans le plan $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Déterminer, graphiquement et analytiquement, le bord, l'adhérence, et l'intérieur d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
- ☐ Construire un schéma représentant graphiquement une fonction simple à deux variables dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Étudier la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^n$ (c.à.d démontrer si elle converge ou diverge, et calculer sa limite).
- ☐ Utiliser les propriétés des normes et des limites (dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^n$) pour construire des preuves simples.
- ☐ Calculer la longueur d'une courbe paramétrique.

En particulier, assurez-vous de vérifier que:

- Vous utilisez les définitions de bord, adhérence, et intérieur, et d'ensembles ouverts et fermés dans vos justifications pour l'exercice 3.
- Vous veillez à développer vos compétences graphiques en vue de leur utilisation dans les semaines à venir.

Exercice 1.

Trouver l'image et esquisser le graphe des fonctions $f\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ suivantes:

(a) $f(x,y) = 1$

(b) $f(x,y) = x$

(c) $f(x,y) = y$

(d) $f(x,y) = x + y$

(e) $f(x,y) = x - y$

(f) $f(x,y) = -x - y - 1$

Exercice 2.

Montrer que pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, on a $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq \Big| \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \Big|$.

Exercice 3.

Déterminer le bord ∂A, l'adhérence $\bar{A}$ et l'intérieur A° des sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{R}^2$ suivants. Puis, dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés et/ou compacts, et les esquisser.

(a) $A = [0,2] \times [4,5[$

(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq |x|\}$

(c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^4\}$

(d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < 1 - x^4\}$

(e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(x+y) = 0\}$

(f) $A = \{(\frac{n-1}{n}, e^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(g) $A =$ domaine de définition de $f(x,y) = \log(4 - (x+y)^2)$

(h) $A =$ image de $\begin{array}{rrcl} f\colon & [-1,1] \times [-1,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = (x+y, x-y) \end{array}$

Exercice 4.

(a) Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ est bornée.

(b) Montrer que toute suite bornée de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ admet une sous-suite convergente. (Et se convaincre que c'est vrai aussi pour des suites bornées de $\mathbb{R}^n$.)

Indication: Utiliser les résultats correspondants pour $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Montrer que la fonction distance

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\longmapsto d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

est continue en tout $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 6.

Étudier la convergence des suites $(\boldsymbol{x}_k)_k$ suivantes, et donner leur limite si elle existe.

(a) $\boldsymbol{x}_k = \left(\sqrt[k]{2},\ \sqrt[k]{3},\ \sqrt[k]{4}\right) \in \mathbb{R}^3$

(b) $\boldsymbol{x}_k = \left(\dfrac{\ln(k)}{k+1}, \dfrac{\sin(k)}{k+1}, \dfrac{(2k-1)^5}{(k+3)^3(2k+1)^2}\right) \in \mathbb{R}^3$

(c) $\boldsymbol{x}_k = \left(e^{-k},\ e^k\right) \in \mathbb{R}^2$

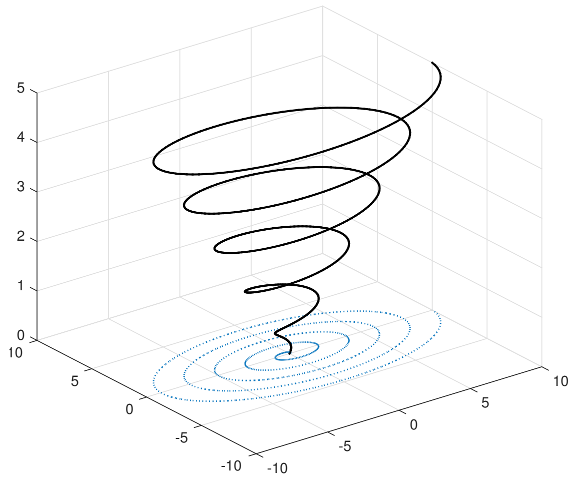
(d) $\boldsymbol{x}_k = \left(\arctan(k),\ e^{1-\frac{1}{k^7}}\right) \in \mathbb{R}^2$

(e) $\boldsymbol{x}_k = \left(\dfrac{|\sin(k)|^3}{\sqrt[3]{k}}, \dfrac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 7.

Laquelle des fonctions $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}^3$ suivantes pourrait être une paramétrisation de la courbe illustrée dans la figure ci-contre (avec sa projection sur le plan x-y) ?

- ☐ $f(t) = (2\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$
- ☐ $f(t) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$
- ☐ $f(t) = (2t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$
- ☐ $f(t) = (t\cos(\pi t), t\sin(2\pi t), t)$



Exercice 8.

Calculer la longueur du chemin $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos(t),\ \sin(t),\ t)$.