Analyse II — Série 3

EPFL – Sections SIE/GC — 06.03.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Utiliser les polynômes caractéristiques pour résoudre des équations différentielles linéaires (EDL) homogènes.
- ☐ Construire des solutions particulières d'EDL en utilisant des combinaisons linéaires de fonctions élémentaires.
- ☐ Construire des solutions particulières d'EDL en utilisant la méthode de variation de la constante (avec une ou plusieurs constantes !).
- ☐ Choisir une méthode appropriée pour trouver des solutions particulières d'EDL d'après le problème à résoudre.
- ☐ Construire la solution générale d'une EDL à partir de la solution de l'équation homogène et une solution particulière du problème.

En particulier, assurez-vous de vérifier que:

- Vous reconnaissez bien les cas résonants lorsque vous construisez des solutions particulières d'EDL.

Exercice 1. *(Echauffement)*
Trouver la solution générale $y(x)$ des équations différentielles suivantes:

(a) $y'' = 0$ (b) $y'' = 1$ (c) $y'' - y = 0$ (d) $y'' + y = 0$

Exercice 2.
Trouver la solution générale $y(x)$ des équations différentielles suivantes:

(a) $y'' + 4y = 3e^{2x}$

(b) $y'' + 4y = 5\cos(2x)$

(c) $4y'' - 4y' + my = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$

(d) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)} \quad (x \in]0, \pi[)$

(e) $y^{(4)} - y'' - 12y = 12x + 5$

(f) $y^{(3)} - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x} + \sin(x)$

Exercice 3.
Résoudre les équations différentielles ci-dessous pour les conditions initiales données.

(a) $y' - 3y = 10\cos(x) + 2e^{3x}$, $\quad y(0) = 0$.

(b) $y' + y = x^3$, $\quad y(0) = -2$.

(c) $y'' + 2y' - 3y = 5\sin(3x)$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 4.
Parmi les 6 phrases suivantes, lesquelles sont vraies/fausses ?

(a) Si $y(x)$ une solution d'une $\left\{\begin{array}{l}\text{équation différentielle}\\ \text{équation différentielle linéaire}\\ \text{équation différentielle linéaire homogène}\end{array}\right.$ du premier ordre sur un intervalle ouvert I, alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est une solution de cette même équation sur I.

(b) Si $y_1(x), y_2(x)$ sont solutions d'une
équation différentielle
équation différentielle linéaire
équation différentielle linéaire homogène

du premier ordre sur un intervalle ouvert I, alors $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est également une solution de cette même équation sur I.

Exercice 5. *(Oscillateur harmonique amorti)*
On considère l'équation différentielle

$$my'' + \alpha y' + \varepsilon y = H\sin(\omega t) \qquad \text{où } m, \alpha, \varepsilon > 0 \text{ et } H, \omega \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la solution générale de l'équation homogène associée. Que se passe-t-il avec cette solution lorsque $t \to \infty$?

(b) Trouver une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation originale.

(c) Quel est le comportement de la solution générale lorsque $t \to \infty$?

Remarque: Cette équation différentielle écrit le mouvement d'une masse m suspendue à une extrémité d'un ressort (cf. cours de physique).

Exercice 6.
La solution de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 41y = 0$ qui vérifie la condition initiale $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$ est:

- ☐ $y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$
- ☐ $y(x) = e^{4x}\left(7\cos(5x) - 6\sin(5x)\right)$
- ☐ $y(x) = (-37x + 7)e^{5x}$
- ☐ $y(x) = e^{5x}\Big(7\cos(4x) - \dfrac{37}{4}\sin(4x)\Big)$

Exercice 7.
Déterminer la solution maximale $y(x)$ du problème de Cauchy suivant:

$$xyy' - y^2 + x^2 = 0, \qquad y(1) = 1,$$

(a) en utilisant la méthode des équations de Bernoulli ($y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$),

(b) en utilisant la méthode des équations homogènes ($y' = h(\frac{y}{x})$).

Exercice 8.
Déterminer la solution maximale $y(t)$ du problème à valeur initiale *non-linéaire* suivant:

$$y'' = y^3, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Indication: Multiplier par y'.