Analyse II — Série 2

EPFL – Sections SIE/GC — 27.02.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir…

- ☐ Reconnaître quand une équation peut être résolue par séparation de variables.
- ☐ Appliquer la méthode de séparation de variables pour trouver la solution générale d'une EDO.
- ☐ Trouver la solution particulière d'une EDO à partir de sa solution générale.
- ☐ Identifier et inspecter individuellement les cas où la méthode de séparation de variables ne peut pas être utilisée.
- ☐ Résoudre des EDO linéaires en traitant séparément l'équation homogène et l'équation non-homogène.

Exercice 1.
Déterminer la solution générale $y(x)$ des équations différentielles suivantes par séparation des variables. Puis, si l'EDO est linéaire, calculer la solution une seconde fois en utilisant la méthode vue en cours.

(a) $y' = y - 2$ (b) $y' = -x(y-1)$ (c) $y' + \dfrac{3}{x}y = 0$

(d) $y' = \sqrt{y^2+1}$ *Indication: Substition hyperbolique !*

Exercice 2.
Trouver la solution maximale $y(x)$ pour la condition initiale donnée des equations différentielles suivantes:

(a) $x(3x+4) - 6(y-1)^2\, y' = 0,$ $y(0) = 0.$

(b) $y\, y' - e^{y^2-4x} = 0,$ $y(0) = \sqrt{\ln(2)}.$

(c) $y' - y\sin(x) = 4\sin(x)\, e^{\cos(x)},$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

(d) $xy' - 4x\ln(x) = y,$ $y(1) = 1.$

Exercice 3. *(Lois de croissance)*
Soit $\varepsilon \geq 0$, et $y_\varepsilon(x)$ la solution maximale de l'équation différentielle $y' = y^{1+\varepsilon}$ pour la condition initiale $y(0) = 1$.

(a) Déterminer $y_\varepsilon(x)$ pour tout $\varepsilon \geq 0$ (et spécifier son domaine de définition !)

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} y_\varepsilon(x) = y_0(x)$.

Exercice 4. *(Modèle de Verhulst)*
On considère l'EDO du modèle de Verhulst pour la croissance d'une population:

$$y' = y(a - by), \qquad a, b \in \left]0, \infty\right[,$$

pour la condition initiale $y(0) = y_0$.

Déterminer la solution maximale $y(t)$, et expliquer le comportement de la solution pour $y_0 > \frac{a}{b}$ et pour $y_0 < \frac{a}{b}$.

Exercice 5.
Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$x(x-1)y' - y(y-1) = 0$$

et dessiner le graphe des solutions maximales pour les conditions initiales suivantes :

x_0	-1	-1	2	2
$y(x_0)$	-1	1	4	-4

Exercice 6.
On considère l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$.

(a) Déterminer l'unique solution maximale $y(t)$ pour la condition initiale $y(0) = 1$.

(b) Déterminer *toutes* les solutions maximales $y(t)$ vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 7.
La fonction $u(t)$ qui satisfait pour $t \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

avec la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi :

☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{6}$ ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{2}$ ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{4\,e^2}$ ☐ $u(\pi) = \dfrac{e^2}{4}$

Exercice 8.
La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x\,y' - y = x$ pour $x \in]0, \infty[$ avec la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie :

☐ $y(2) = \ln(2)$ ☐ $y(2) = 2\,\ln(2) + 2$

☐ $y(2) = 2\,\ln(2)$ ☐ $y(2) = -2\,\ln(2)$

Exercice 9.
La solution générale de l'équation différentielle $\frac{1}{2}y' \sin(y) = (4x^3 + 3x)\cos(y)^2$ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto y(x) = \dots \end{array} \middle| \, C > 1 \right\}$$

où :

☐ $y(x) = \arccos\left(e^{-\frac{2}{2x^4+3x^2+C}}\right)$ ☐ $y(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{2x^4+3x^2+C}\right)$

☐ $y(x) = \arccos\left(\dfrac{-1}{2x^4+3x^2+C}\right)$ ☐ $y(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{2x^4+3x^2+C}\right)$