Analyse II — Série 1

EPFL – Sections SIE/GC — 20.02.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir. . .

- ☐ Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle donnée.
- ☐ Démontrer des propriétés de base de solutions d'équations différentielles.
- ☐ Expliquer la différence entre une solution, une solution maximale, et une solution générale d'une équation différentielle.
- ☐ Construire une solution maximale à partir d'une solution particulière.

En particulier, assurez-vous de vérifier que:

- Vous appliquez correctement les règles de dérivation apprises en Analyse I.
- Vous pouvez expliquer l'idée ("astuce") des preuves des exercices 2 et 3.

Exercice 1.
Donner des équations différentielles *autonomes*[1] dont les fonctions suivantes sont solutions:

(a) $y(t) = 5^t$

(b) $y(t) = \sin(t)$

(c) $y(t) = \log(t)$

(d) $y(t) = e^t \sin(t)$

Pouvez-vous trouver une équation du premier ordre ?

Exercice 2.
Montrer que $y(t) = e^t$ est *l'unique* solution de l'équation $y' = y$ pour la condition initiale $y(0) = 1$.
Indication: Si $y_2(t)$ est une autre solution, calculer la dérivée de $y_2(t)e^{-t}$.

Exercice 3. *Equations différentielles linéaires*
On considère l'équation différentielle d'ordre n suivante:

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = b,$$

où les $a_i = a_i(t)$ et $b = b(t)$ sont des fonctions réelles. Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions, montrer que $y_2(t) = y_1(t) + h(t)$, où $h(t)$ est une solution de:

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = \mathbf{0}.$$

1. c'est à dire, de la forme $E(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (pas de dépendance en t)

Exercice 4.

(a) Vérifier que pour $x \notin \left\{ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ les fonctions

$$y(x) = 1 + x\tan(x) + C\big(\cos(x)\big)^{-1} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

vérifient l'équation

$$y' - \tan(x)\, y = x\,.$$

(b) Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ les fonctions $y(x) = 2\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{2} + Ce^{-\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y' + y\cos(x) = \cos(x)^3.$$

Exercice 5.

On considère les équations différentielles suivantes:

$$E_1 : (t-1)\, y' = y \qquad\qquad E_2 : y' = \frac{y}{t-1} \qquad\qquad E_3 : \frac{y'}{y} = \frac{1}{t-1}.$$

Pour chacune de ces EDO, déterminer lesquelles des fonctions suivantes sont des *solutions*, et lesquelles sont des *solutions maximales*. Donner (deviner!) ensuite leur solution générale.

$$\begin{aligned} y_1 \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 2(t-1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 \colon \left]1,\infty\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 5(t-1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_3 \colon \left]-\infty,1\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -3(t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 \colon \mathbb{R}\setminus\{1\} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 6(t-1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_5 \colon \left]0,1\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -4(t-1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_6 \colon \left]1,\infty\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Exercice 6. *Equation de Riccati*

(a) Vérifier que pour $x > 0$ la fonction

$$y(x) = x - \frac{2x}{1 + xe^{-x}}$$

vérifie l'équation différentielle de Riccati

$$2x^2 y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy \tag{1}$$

pour la condition initiale $y(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$.

(b) Est-ce que cette solution est maximale ? Si non, donner la solution maximale pour la condition initiale donnée.

(c) Trouver toutes les conditions initiales pour lesquelles $y(x)$ est solution de (1).