Analyse II

EPFL – Sections SIE/GC

Série 13

22.05.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir. . .

- ☐ Esquisser des régions en deux ou trois dimensions.
- ☐ Traduire des régions géométriques en intégrales multiples avec des bornes appropriées.
- ☐ Effectuer des changements de coordonnées pour simplifier le calcul d'intégrales multiples, en :
  - identifiant les situations où un changement de coordonnées est pertinent,
  - trouvant des coordonnées appropriées,
  - effectuant correctement le changement de variables à l'aide du jacobien de la transformation.
- ☐ Déterminer la masse totale et le centre de gravité d'une aire ou d'un solide de densité donnée à l'aide d'intégrales multiples.
- ☐ Calculer le volume d'un solide de révolution autour d'un axe ou d'une droite quelconque, soit en le traduisant en une intégrale multiple, soit à l'aide de son centre de masse.

Exercice 1.
Calculer l'aire d'un disque de rayon R en coordonnées polaires.

Exercice 2.

(a) Soit D le domaine dans le premier quadrant délimité par les courbes

$$x^2 + y^2 = 5, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = 4.$$

Esquisser le domaine D, et évaluer l'intégrale double $\displaystyle\int_D x^3 y^3 \, dxdy$.

(b) Esquisser le domaine

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 4x,\ 1 \leq xy \leq 2\}$$

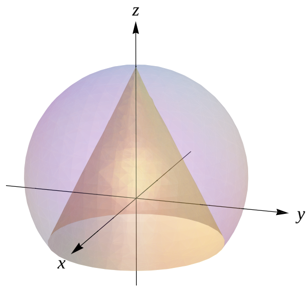
et calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_D x^2\, y^2\, dx\, dy\,.$

Exercice 3.
Évaluer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D \left(x^5 y + y^5 x\right) dxdy$, où D est le domaine dans le premier quadrant, délimité par les courbes

$$x^2 + y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = 2.$$

Exercice 4.
Déterminer le volume du solide formé des points (x, y, z) avec $z \geq 0$ et délimité par la surface cylindrique $x^2 + z^2 = 1$ et les plans $x + y + z = 1,\ 2y - z = 6$ et $z = 0$.

Exercice 5.
Calculer le volume du domaine D délimité par l'extérieur du cône d'équation $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}z-3\right)^2$ et l'intérieur de la sphère de rayon 5 centrée en $(0,0,1)$ (voir figure ci-contre).

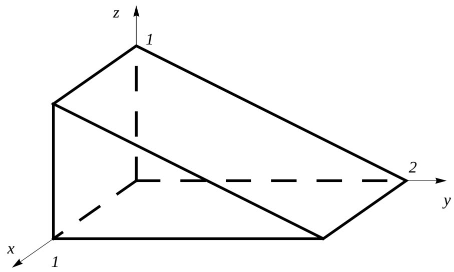


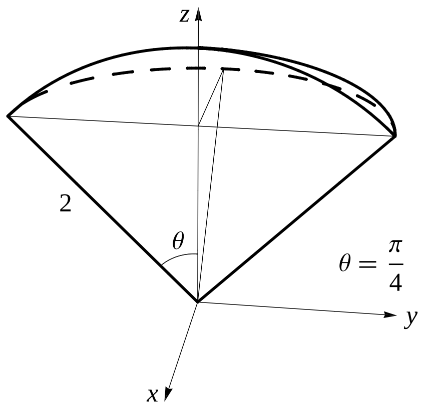
Exercice 6.
Calculer la masse totale du domaine

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1,\ y\le z\le 1\}.$$

si la densité de masse $\rho\colon D\to\mathbb{R}$ est donnée par $\rho(x,y,z)=z^{7/2}\ e^{-y^{3/2}z^{3/2}}$.

Exercice 7.
Pour le domaine D représenté ci-contre, déterminer le centre de gravité G si la densité de masse $\rho\colon D\to\mathbb{R}$ est $\rho(x,y,z)=4x^2$.





Exercice 8.
Trouver la coordonnée z du centre de gravité du secteur sphérique représenté dans la figure ci-contre en supposant que la densité de masse est proportionnelle à la distance à l'origine.

Exercice 9.
Calculer l'intégrale triple $\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz$ où D est le tore solide engendré par la rotation du cercle

$$(x-a)^2+z^2=b^2,\ y=0\quad (\text{où } 0<b<a)$$

autour de l'axe z.

Exercice 10.
Soit D le parallélogramme de l'exercice 8, série 12 (voir ci-contre). Calculer le volume du solide de rotation obtenu en faisant tourner D autour de

(a) l'axe des x.
(b) l'axe des y.
(c) la droite $y=-2x$.