Analyse II — Série 12

EPFL – Sections SIE/GC — 15.05.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Étant donné un problème énoncé, reconnaître qu'il peut être résolu comme un problème d'optimisation. De plus :
  - identifier et exprimer la fonction objectif ;
  - trouver une expression pour la ou les contraintes ;
  - le résoudre en utilisant, par exemple, les multiplicateurs de Lagrange.
- ☐ Calculer une intégrale double donnée.
- ☐ Étant donné un domaine d'intégration, exprimer l'intégrale double sur ce domaine et la calculer.
- ☐ Choisir l'ordre d'intégration le plus approprié afin :
  - de pouvoir calculer l'intégrale, ou
  - de simplifier le calcul de l'intégrale.

Exercice 1.

(a) Parmi tous les triangles rectangles ayant la même aire fixée A, quel est celui qui a la plus petite hypoténuse ?

(b) Trouver le point dans l'intersection du cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et du plan d'équation $z = 1 + x + y$ qui est le plus près de l'origine.

(c) Trouver les axes de l'ellipse déterminée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et du plan d'équation $x + y + 2z = 2$.

Exercice 2.

(a) On veut construire une boîte rectangulaire sans couvercle à partir de 12 m^2 de carton. Quel est le volume maximal d'une telle boîte ?

(b) On veut construire une boîte rectangulaire sans couvercle de volume 4 m^3. Quelle est la surface minimale de carton requise pour une telle boîte ?

(c) Que constatez-vous ?

Exercice 3.

Soit $D = [0,1]\times[0,2]$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D \left(x^3 - y^{1/3}\right)\, dxdy$ en intégrant d'abord

(a) par rapport à x, (b) par rapport à y.

Comparer les résultats.

Exercice 4.
Calculer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\int_{0}^{1}\cos(x+y)\,dx\right)dy$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{x}^{2x}e^{x+y}\,dy\right)dx$

Exercice 5.
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dxdy$ et esquisser le domaine d'intégration D pour:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x+y}\,,$ $D=\{(x,y):0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$

(b) $f(x,y)=x^2y\,,$ $D=\{(x,y):0\le y\le x^2,\ 0\le x\le 2\}$

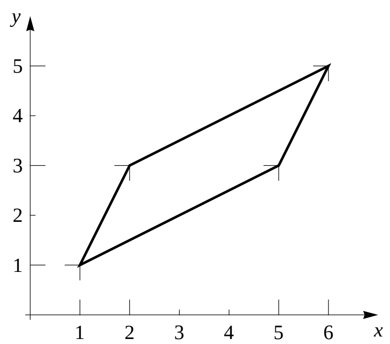
(c) $f(x,y)=|(x-y)(x+y-2)|\,,$ $D=\{(x,y):0\le y\le x,\ x+y-2\le 0\}$

Exercice 6.
Evaluer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{y}^{1}e^{x^2}\,dx\right)dy$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^{1}\sqrt{1+x^4}\,dx\right)dy$

Exercice 7.
Esquisser le domaine $D=\{(x,y):y^2\le x,\ x-6\le y\le x\}$ et calculer son aire.

Exercice 8.
Calculer l'aire du parallélogramme représenté ci-contre à l'aide d'une intégrale double, d'abord *sans* puis *avec* changement de variables. Un changement de variables vous semble-t-il utile dans ce cas ?



Exercice 9.
Calculer l'aire d'un disque de rayon R en coordonnées cartésiennes.