Analyse II — Série 11

EPFL – Sections SIE/GC — 08.05.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Trouver les points stationnaires d'une fonction différentiable.
- ☐ Analyser la nature d'un point stationnaire (minimum, maximum ou point selle).
- ☐ Déterminer les extrema globaux d'une fonction définie sur un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Résoudre un problème d'optimisation avec contrainte à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, en
  - reconnaissant la fonction objectif ;
  - identifiant la ou les contraintes.

Exercice 1.
Déterminer tous les points stationnaires des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

(a) $f(x,y) = 2 + 3y^2 + \cos(x)$

(b) $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

(c) $f(x,y) = -3x^2 + xy^2 - y^4$

(d) $f(x,y,z) = -2x^2 - 5y^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 2$

(e) $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 4$

Exercice 2.
Déterminer les extremums absolus de la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y,\qquad D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}$

(b) $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y,\qquad D = \{(x,y) \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 32\}$

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - \frac{5}{4},\ D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

Exercice 3.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

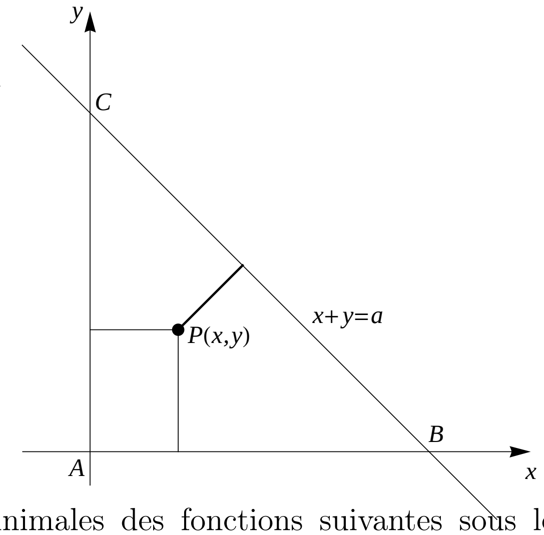
$$\frac{\partial f}{\partial x} = z + 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x + 2\,.$$

Sachant que $f(0,0,0) = 3$, déterminer les extremums absolus de f sur le domaine

$$D = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c\}\,, \qquad \text{où}\ \ a,b,c > 0.$$

Exercice 4.
Refaire l'ex. 6(c) de la série 9 en utilisant les résultats sur les extrema vus en cours.

Exercice 5.
Trouver le point $P(x, y)$ à l'intérieur du triangle ABC pour lequel le produit des distances aux droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $x+y = a$ $(a > 0)$ est maximale.



Exercice 6.
Déterminer les valeurs maximales et minimales des fonctions suivantes sous les contraintes données.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $\quad x^4 + y^4 = 32$.

(b) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et $x - y = 1$.

Exercice 7.
Un terrain montagneux est modélisé par la surface d'équation

$$4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz - 4x = 1.$$

où z est la hauteur. Déterminer les points les plus hauts/plus bas de cette surface.

Exercice 8.
On considère les courbes suivantes dans $\mathbb{R}^2$:

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 = 0\} \qquad \text{et} \qquad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x + 6 = 0\}.$$

Déterminer les points $(x_1, y_1) \in C_1$ et $(x_2, y_2) \in C_2$ qui sont le plus proche l'un de l'autre.