Analyse II — Série 10

EPFL – Sections SIE/GC — 01.05.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Déterminer l'équation du plan tangent à une surface en un point donné.
- ☐ Construire le polynôme de Taylor d'ordre N d'une fonction de 1, 2 ou 3 variables en un point spécifié.
- ☐ Analyser la nature d'un point stationnaire d'une fonction de deux variables :
  - en utilisant les propriétés de la matrice hessienne ;
  - en étudiant les valeurs de la fonction autour du point.

Exercice 1.
Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation:

(a) $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

(b) $xz^2 - 2x^2y + y^2z = 0$ aux points de la forme $(1, 1, z_0)$.

Exercice 2.
Pour les fonctions f suivantes, déterminer le polynôme de Taylor d'ordre N au point donné.

(a) $f(x, y) = 3xy + x^2 - y + 5x - 3$	$N = 1$,	et $(x_0, y_0) = (1, -2)$
(b) $f(x, y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1$	$N = 2$,	et $(x_0, y_0) = (0, 0)$
(c) $f(x, y, z) = e^x + y\sinh(z)$	$N = 2$,	et $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$
(d) $f(x, y, z) = e^{2xz+y}$	$N = 2$,	et $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$
(e) $f(x, y) = \cos(x)^{\sin(y)}$	$N = 3$,	et $(x_0, y_0) = (0, 0)$
(f) $f(x, y) = \log(x + y)$	$N = 5$,	et $(x_0, y_0) = (2, -1)$

Exercice 3.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de classe C^N. On suppose que f admet un développement limité d'ordre N en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ donné par

$$f(x, y) = p_N(x, y) \ + \ \|(x, y)\|^N \varepsilon(x, y), \qquad \text{où } \varepsilon(x, y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

(a) Montrer que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixés, la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$ admet un développement limité d'ordre N en $t_0 = 0$ donné par

$$g(t) = p_N(tx, ty) \ + \ |t|^N \varepsilon(t), \qquad \text{où } \varepsilon(t) \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

(b) En déduire que $p_N(x, y) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \cdots + \frac{1}{N!}g^{(N)}(0)$.

Exercice 4.
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle. On suppose que le vecteur position $f(t)$ est orthogonal au vecteur vitesse $f'(t)$ pour tout $t \in I$. Montrer que l'image de f est contenue dans un cercle centré en $(0, 0)$.

Exercice 5.
On considère la matrice réelle symétrique $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) M est définie positive.

(b) Les deux valeurs propres de M sont strictement positives.

(c) $\Lambda_1 = a > 0$ et $\Lambda_2 = \det(M) > 0$.

Exercice 6.
Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données ci-dessous, étudier la nature du point stationnaire $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = -x^2 + y^2$

(d) $f(x,y) = -x^2 - y^2$

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4$

(f) $f(x,y) = x^4 - y^4$

(g) $f(x,y) = -x^4 + y^4$

(h) $f(x,y) = -x^4 - y^4$