Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) On pose $F(x,y) = 2x^3 - x^2y^4 + 2y^3 + 3x - 2$, qui est de classe C^1. On a $x_0 = 0$, et on trouve y_0 grâce à l'équation:

$$F(0, y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 1.$$

On calcule alors

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -4x^2y^3 + 6y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 6 \neq 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(x,y) = 0$ définit une fonction implicite $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = 1$. Pour trouver $f'(0)$, on dérive l'équation:

$$(F(x, f(x)))' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2xf(x)^4 + 3 + f'(x)(-4x^2f(x)^3 + 6f(x)^2) = 0.$$

En remplaçant x par 0 et $f(0)$ par 1, on trouve

$$3 + 6f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$. Le graphe de la fonction f et de son développement limité se trouve ci-dessous.

(b) On pose $F(x,y) = xe^y + ye^x + 2$, qui est de classe C^1, de sorte que l'équation soit $F(x,y) = 0$. On a $x_0 = 1$, et on trouve y_0 grâce à l'équation:

$$F(0, y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = -2.$$

On calcule

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^x + x\,e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,-2) = 1 \neq 0.$$

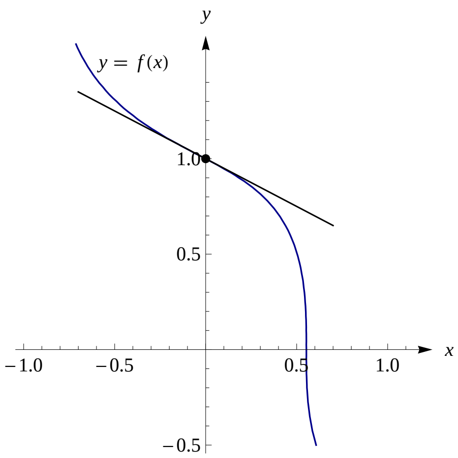
Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $y = f(x)$ définie implicitement par l'équation $F(x,y) = 0$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = -2$. Pour trouver $f'(0)$, on dérive l'équation:

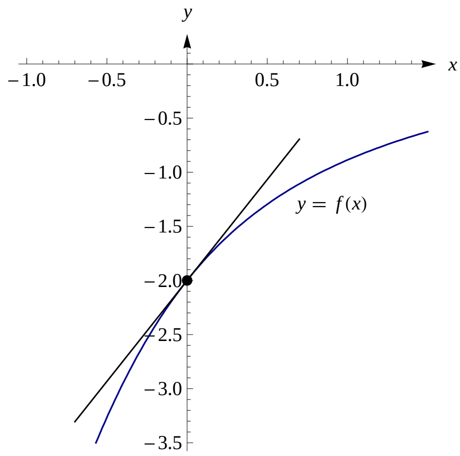
$$(F(x, f(x)))' = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x)e^x + f'(x)(e^x + xe^{f(x)}) = 0.$$

En remplaçant x par 0 et $f(0)$ par -2, on trouve

$$e^{-2} - 2 + f'(0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 2 - \frac{1}{e^2} \approx 1.865.$$

Ainsi $f(x) = -2 + (2 - \frac{1}{e^2})x + x\varepsilon(x)$. Le graphe de la fonction f et de son développement limité se trouve ci-dessous.





Solution 2.

☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 11$ ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \dfrac{12}{5}$ ■ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \dfrac{9}{2}$ ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 0$

En dérivant l'équation $f\big(x, y, g(x,y)\big) = 11$ par rapport à x on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y, g(x,y)\big) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y, g(x,y)\big) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$$

et donc, puisque $g(1,3) = -2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,-2) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,3,-2) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 0\,,$$

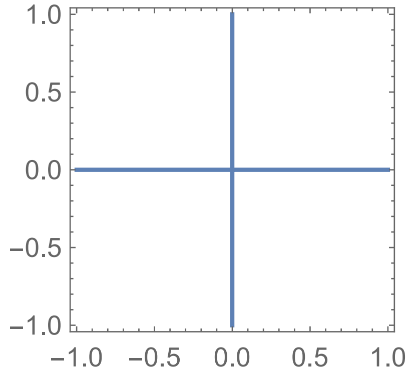
d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) &= -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3,-2)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,3,-2)} = \left[-\frac{-9yx^2}{6z^2 - 6y}\right]_{(x,y,z)=(1,3,-2)} \\ &= -\frac{-27}{24-18} = \frac{9}{2}\,.\end{aligned}$$

Solution 3.

On pose $F(x,y) = xy$, de sorte que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \big[y\big]_{(x,y)=(0,0)} = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \big[x\big]_{(x,y)=(0,0)} = 0$. On remarque donc que le théorème des fonctions implicites ne s'applique donc pas: ni en y ni en x. Cependant, ça n'est pas suffisant pour montrer qu'il n'y a pas de fonctions implicites: il se pourrait qu'il en existe même si le théorème ne marche pas.

Pour montrer l'exercice, il suffit de voir que $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$; il y a donc "plusieurs y" associés à $x = 0$ et "plusieurs x" associés à $y = 0$; ça ne peut donc être le graphe d'une fonction (ni en x ni en y).



Une version formelle est la suivante: supposons que $xy = 0$ est le graphe d'une fonction $y = f(x)$ dans un voisinage de $(0, 0)$. Cela veut dire qu'il y a une boule $B = B((0, 0), r)$ de rayon r telle que pour tous $(x, y) \in B$ on a $y = f(x) \Leftrightarrow xy = 0$. Ainsi, les points $(x_1, y_1) = (0, \frac{r}{2})$ et $(x_2, y_2) = (0, -\frac{r}{2})$ sont dans B, et on a $x_1y_1 = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = y_1 \Rightarrow f(0) = \frac{r}{2} > 0$ et $x_2y_2 = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = y_2 \Rightarrow f(0) = -\frac{r}{2} < 0$ ce qui est absurde. Un argument similaire marche pour les fonctions $x = f(y)$.

On généralise cela facilement à la fonction $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ de classe C^1 qui n'est pas le graphe d'une fonction au voisinage de $\mathbf{0}$.

Solution 4.

Rappel: Pour un vecteur unitaire $\boldsymbol{e}$, la dérivée directionnelle d'une fonction f de classe C^1 au point p_0 suivant un vecteur $\boldsymbol{e}$ est donnée par $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \boldsymbol{e}$.

(a) Observons qu'on a

$$f(x, y) = f_1(x, y)\, f_2(x, y), \text{ avec } f_1(x, y) = (x - 2y)^2 \text{ et } f_2(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)\,.$$

Ainsi on peut utiliser la règle de dérivée du produit (Série 6, ex 5b) pour calculer $\nabla f(p_0)$. En effet, on a

$$f_1(p_0) = 1\,,\ \nabla f_1(x, y) = 2(x - 2y)\,\big(1, -2\big) \ \Rightarrow\ \nabla f_1(p_0) = \big(-2, 4\big),$$

$$f_2(p_0) = \ln(3)\,,\ \nabla f_2(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,\big(2x, 2y\big) \ \Rightarrow\ \nabla f_2(p_0) = \big(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\big)\,,$$

et donc (noter que $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(1, 2\big)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) &= \Big[f_2(p_0)\nabla f_1(p_0) + f_1(p_0)\nabla f_2(p_0)\Big] \cdot \boldsymbol{e} \\ &= \left[\ln(3)\big(-2, 4\big) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \\ &= \frac{2(3\ln(3) + 1)}{\sqrt{5}}\,. \end{aligned}$$

(b) Pour la fonction g on peut utiliser la règle de dérivée du quotient (Série 6, ex 5c) puisqu'on a

$$g(x,y) = \frac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)}, \quad \text{avec} \quad g_1(x,y) = e^{2x(y+1)} \quad \text{et} \quad g_2(x,y) = 3 + x^2y^4\,.$$

On calcule alors

$$g_1(p_0) = e^4\,, \qquad \nabla g_1(x,y) = e^{2x(y+1)}\big(2y+2, 2x\big) \quad \Rightarrow \quad \nabla g_1(p_0) = e^4\big(4,2\big),$$
$$g_2(p_0) = 4\,, \qquad \nabla g_2(x,y) = \big(2xy^4, 4x^2y^3\big) \quad \Rightarrow \quad \nabla g_2(p_0) = (2,4)\,,$$

pour obtenir finalement

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) &= \left[\frac{1}{g_2(p_0)} \cdot \nabla g_1(p_0) - \frac{g_1(p_0)}{g_2(p_0)^2} \cdot \nabla g_2(p_0)\right] \cdot \boldsymbol{e} \\ &= \left[\frac{e^4}{4}\big(4,2\big) - \frac{e^4}{16}\big(2,4\big)\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\big(1,2\big) = \frac{11e^4}{8\sqrt{5}}\,.\end{aligned}$$

Solution 5.
On commence par étudier la continuité de f en $(0,0)$. Comme on a

$$\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)\,,$$

f n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi f n'est pas différentiable en ce point et on doit appliquer la définition pour calculer la dérivée directionnelle. Soit $\boldsymbol{e} = (u,v)$ un vecteur unitaire. Alors on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu,0+tv)-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{tut^2v^2}{t^2u^2+t^4v^4} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{uv^2}{u^2+t^2v^4} = \begin{cases}\frac{v^2}{u}\,, & u \neq 0\\ 0\,, & u = 0\end{cases}\end{aligned}$$

L'existence des dérivées directionnelles en un point dans toutes les directions n'est donc pas suffisante pour qu'une fonction soit continue et à fortiori différentiable en ce point !

Solution 6.

(a) Pour une fonction f de classe C^1, la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0)$ au point p_0 suivant le vecteur (unitaire) $\boldsymbol{e}$ est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \boldsymbol{e}\,.$$

La fonction f donnée est bien C^1. Puisque

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy) \qquad \text{et} \qquad \nabla f(1,-1,2) = (-2,2,-1)\,,$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(1,-1,2) = (-2,2,-1) \cdot \frac{1}{3}(2,-1,2) = -\frac{8}{3}\,.$$

(b) La pente de f en p_0 dans le sens du vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ est donnée par la dérivée directionnelle suivant ce vecteur unitaire (voir cours), c'est-à-dire par

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(p_0) = \nabla f(p_0)\cdot \boldsymbol{u} &= (-2,2,-1)\cdot\big(\sin(\theta)\cos(\varphi),\sin(\theta)\sin(\varphi),\cos(\theta)\big)\\ &= 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi)-\cos(\varphi)\big)-\cos(\theta) =: g(\theta,\varphi)\,,\end{aligned}$$

où $g : [0,\pi]\times[0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(c) On sait du cours qu'en un point où f est différentiable, la pente de la tangente au graphe est maximale (minimale) dans le sens du gradient (opposée au gradient) et qu'elle est égale à (l'opposée de) la norme du gradient. Au point $p_0 = (1,-1,2)$, la pente maximale (minimale) vaut donc

$$\|\nabla f(1,-1,2)\| = 3 \qquad \big(-\|\nabla f(1,-1,2)\| = -3\big).$$

Les directions correspondantes sont $\pm\frac{\nabla f(1,-1,2)}{\|\nabla f(1,-1,2)\|} = \pm\frac{1}{3}(-2,2,-1)$. Pour trouver les angles (θ,φ) donnant lieu à ces directions, on doit résoudre

$$\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mp\frac{2}{3}\\ \pm\frac{2}{3}\\ \mp\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\theta = \arccos\big(\mp\tfrac{1}{3}\big) \;\Rightarrow\; \sin(\theta) = \sqrt{1-\big(\mp\tfrac{1}{3}\big)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\cos(\varphi) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\varphi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \varphi = \begin{cases}\frac{3\pi}{4}\\ \frac{7\pi}{4}\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\operatorname{argmax} g(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(-\frac{1}{3}\big)\,,\,\frac{3\pi}{4}\big)\\ \operatorname{argmin} g(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(\frac{1}{3}\big)\,,\,\frac{7\pi}{4}\big)\end{cases}$$

La pente de f en p_0 est donc maximale pour les valeurs d'angles $(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(-\frac{1}{3}\big)\,,\,\frac{3\pi}{4}\big)$ et minimale pour $(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(\frac{1}{3}\big)\,,\,\frac{7\pi}{4}\big)$.

Solution 7.

Pour la première limite, la fonction vaut 0 si $x = 0$ et $\frac{1}{2}$ si $x = y$ (cf chapitre 4 du cours) donc la limite n'existe pas.

Pour la deuxième, on remarque qu'en coordonnées sphériques

$$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta),$$

la fonction $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ vérifie

$$|f(x,y,z)| = \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{r^3\left|\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\right|}{r^2} \le r.$$

On peut donc conclure en utilisant un argument similaire à celui des coordonnées polaires en deux dimensions: comme r est la distance entre (x,y,z) et $(0,0,0)$, on a $r\to 0$ lorsque $(x,y,z)\to(0,0,0)$; de plus, comme on a "enlevé les θ, φ" avant de prendre la limite, le passage d'une limite à 3 variables vers une limite à une variable est justifié, et on trouve que la limite vaut 0.

Une version formelle (qui n'utilise que les suites) est: Soit $((x_k, y_k, z_k))_k \subseteq \mathbb{R}^3$ une suite qui converge vers $(0,0,0)$. On écrit la suite en coordonnées sphériques:

$$(x_k, y_k, z_k) = (r_k \sin\theta_k \cos\varphi_k, r_k \sin\theta_k \sin\varphi_k, r_k \cos\theta_k).$$

Comme $r_k \to 0$ on trouve alors

$$|f(x_k, y_k, z_k)| = r_k \left|\sin^2\theta_k \sin\varphi_k \cos\varphi_k \cos\theta_k\right| \leq r_k \longrightarrow 0.$$

Ainsi $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k, z_k) = 0$ et la limite vaut donc 0.

Pour la troisième limite, on raisonne directement avec les suites: Soit $((x_k, y_k, z_k, t_k))_k$ une suite de $\mathbb{R}^4$ qui converge vers $(0,0,0,0)$. Si l'une des composantes vaut 0, la fonction $f(x,y,z,t) = \frac{xyzt}{x^2+y^2+z^2+t^2}$ vaut directement 0. Et si x_k, y_k, z_k, t_k sont tous $\neq 0$, on a

$$f(x_k, y_k, z_k, t_k) = \frac{x_k y_k z_k t_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + t_k^2} \leq \underbrace{\frac{x_k y_k z_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}}_{\to 0} \cdot t_k \longrightarrow 0$$

par le calcul de la limite précédente. Ainsi la limite de $f(x,y,z,t)$ vaut 0.

Solution 8.
Comme $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont linéairement indépendants, il existe une matrice inversible A telle que

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{v} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{w}.$$

(Il suffit de prendre la matrice de changement de base). On pose $H(x,y) = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et on considère la fonction $g = f \circ H$, i.e. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est donnée par la formule

$$g(x,y) = f(H(x,y)) = f\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right).$$

On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(A\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\right) - f\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + h\,\boldsymbol{v}\right) - f\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\left(H(x,y)\right).\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} \circ H$. On montre de manière analogue que $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}} \circ H$. Entant que composées de fonctions continues, les fonctions $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Comme $f = g \circ H^{-1}$, c'est une composée de fonctions C^1 (la fonction linéaire $H^{-1}(x,y) = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est même C^∞), et on conclut que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 9.

(a) Faux. Voir exercice 5.

(b) Faux. On peut par exemple considérer la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les dérivées partielles en x et y existent et valent 0. Mais le long de toute autre direction $\boldsymbol{v}$, la fonction f n'est pas continue en 0, et la dérivée directionnelle n'existe pas. (Formellement, la fonction $g(t) = f(t\boldsymbol{v})$ n'est pas continue en 0, et donc $g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ n'existe pas).

(c) Vrai. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ (il est donc sous-entendu qu'elles existent dans un voisinage de $(0,0)$) alors f est de classe C^1 par un théorème du cours. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \boldsymbol{v} \rangle$ qui est une fonction continue de (x,y) car elle ne fait intervenir que des sommes et produits.

(d) Faux. Il suffit de prendre une fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue mais qui n'admet pas de dérivée à gauche ou à droite en 0, par exemple

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On vérifie que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sin(\tfrac{1}{h}) \text{ n'existe pas.}$$

On considère alors la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée donnée en coordonnées polaires par

$$\overline{f}(r, \varphi) = g(r), \text{ c'est à dire } f(x,y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

On vérifie, en passant en coordonnées polaires que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \to 0+} g(r) = 0 = f(0,0),$$

et f est donc continue en $(0,0)$. En revanche, pour tout $\boldsymbol{v} \neq 0$, disons de longueur ρ, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}+}(0,0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0 + h\boldsymbol{v}) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{g(h\rho)}{h} = \lim_{h \to 0+} \sin\left(\frac{1}{h\rho}\right)$$

qui n'existe pas.