Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) Pour trouver la transformation $G \equiv H^{-1} \colon E \to D$, on utilise

$$v = \frac{x}{2y+1} \quad \Leftrightarrow \quad x = v(2y+1) \tag{1}$$

qu'on met dans l'expression donnée pour u

$$u = \frac{y}{x+2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y}{v(2y+1)+2} \quad \Rightarrow \quad uv(2y+1) + 2u = y$$
$$\Rightarrow \quad uv + 2u = y(1-2uv) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{u(v+2)}{1-2uv}\ .$$

En remplaçant y dans l'équation de droite dans (1) par ce résultat, on trouve

$$x = \frac{2uv(v+2)}{1-2uv} + v = \frac{2uv(v+2) + v - 2uv^2}{1-2uv} = \frac{(4u+1)v}{1-2uv}\ ,$$

si bien que

$$G(u,v) = \left(\frac{(4u+1)v}{1-2uv}, \frac{u(v+2)}{1-2uv}\right) = \frac{1}{1-2uv}\Big((4u+1)v,\, u(v+2)\Big).$$

(b) La matrice jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x+2)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & -\frac{2x}{(2y+1)^2} \end{pmatrix}.$$

En l'évaluant en $(x,y) = G(u,v)$, on trouve

$$J_H(G(u,v)) = \begin{pmatrix} \frac{u(2uv-1)}{v+2} & \frac{1-2uv}{v+2} \\ \frac{1-2uv}{4u+1} & \frac{2v(2uv-1)}{4u+1} \end{pmatrix} = (1-2uv)\begin{pmatrix} -\frac{u}{v+2} & \frac{1}{v+2} \\ \frac{1}{4u+1} & -\frac{2v}{4u+1} \end{pmatrix}$$

(c) La matrice jacobienne de G est

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u,v) & \partial_v G_1(u,v) \\ \partial_u G_2(u,v) & \partial_v G_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2v(v+2)}{(1-2uv)^2} & \frac{4u+1}{(1-2uv)^2} \\ \frac{v+2}{(1-2uv)^2} & \frac{u(4u+1)}{(1-2uv)^2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{(1-2uv)^2}\begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix} \tag{2}$$

En l'évaluant en $(u,v) = H(x,y)$, on trouve

$$J_G(H(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{2x(x+2)^2}{x+4y+2} & \frac{(x+2)(2y+1)^2}{x+4y+2} \\ \frac{(x+2)^2(2y+1)}{x+4y+2} & \frac{y(2y+1)^2}{x+4y+2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{x+4y+2}\begin{pmatrix} 2x(x+2)^2 & (x+2)(2y+1)^2 \\ (x+2)^2(2y+1) & y(2y+1)^2 \end{pmatrix}$$

(d) On a

$$J_G(u,v) = \frac{1}{(1-2uv)^2}\begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{(1-2uv)^2}\begin{pmatrix} 2v & 1 \\ 1 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v+2 & 0 \\ 0 & 4u+1 \end{pmatrix}.$$

et donc

$$(J_G(u,v))^{-1} = (1-2uv)^2\begin{pmatrix} \frac{1}{v+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4u+1} \end{pmatrix}\frac{1}{1-2uv}\begin{pmatrix} -u & 1 \\ 1 & -2v \end{pmatrix}$$
$$= (1-2uv)\begin{pmatrix} -\frac{u}{v+2} & \frac{1}{v+2} \\ \frac{1}{4u+1} & -\frac{2v}{4u+1} \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la même matrice qu'en (b).

(e) On a

$$\det\big(J_H(x,y)\big) = \frac{2xy}{(x+2)^2(2y+1)^2} - \frac{1}{(x+2)(2y+1)} = -\frac{x+4y+2}{(x+2)^2(2y+1)^2}$$

et donc

$$(J_H(x,y))^{-1} = \frac{(x+2)^2(2y+1)^2}{x+4y+2}\begin{pmatrix} \frac{2x}{(2y+1)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & \frac{y}{(x+2)^2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{x+4y+2}\begin{pmatrix} 2x(x+2)^2 & (x+2)(2y+1)^2 \\ (x+2)^2(2y+1) & y(2y+1)^2 \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la même matrice qu'en (c).

Solution 2.

(a) La transformation est donnée par $G(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. La matrice jacobienne est

$$J_G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le jacobien est donc

$$\det(J_G(r,\varphi)) = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 = r.$$

(b) La transformation est donnée par $G(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$. La matrice jacobienne est

$$J_G(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le jacobien est donc

$$\det(J_G(r,\varphi,z)) = \det(\text{coord. polaires}) \cdot 1 = r.$$

(c) La transformation est donnée par

$$G(r,\theta,\varphi) = \big(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\big).$$

La matrice jacobienne est

$$J_G(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial G_2}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial G_3}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

et le jacobien $\det(J_G(r,\theta,\varphi))$ est donc

$$r^2\left(\sin^3\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \sin^3\theta\cos^2\varphi\right)$$
$$= r^2\sin\theta\,.$$

Solution 3.
Notons $H(x,y) = (r(x,y),\varphi(x,y))$. La formule pour la dérivée de la réciproque donne

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = (J_G(r,\varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

où $(r,\varphi) = (r(x,y),\varphi(x,y)) = H(x,y)$. Ainsi, en notation courte, on a

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Comme $f(x,y) = \bar{f}\circ H(x,y) = \bar{f}(r,\varphi)$, on trouve alors:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\cdot\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\right)$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\cos\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\cdot\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\cos\varphi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\left(\frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial(\frac{\sin\varphi}{r})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\sin\varphi}{r})}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}\cos^2\varphi - \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} \\
&\quad - \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \\
&= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi\partial r} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{r}\right)\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}.
\end{aligned}
$$

Un calcul analogue donne

$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}
$$

et

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi\partial r} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{r}\right)\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}.
$$

En ajoutant les deux expressions, et en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$ on trouve donc:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\
&= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial\varphi^2}(r,\varphi),
\end{aligned}
$$

où $(r,\varphi) = (r(x,y),\varphi(x,y))$.

Solution 4.

(a) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_r & \boldsymbol{u}_\theta & \boldsymbol{u}_\varphi\end{pmatrix}$ et on vérifie que le produit

$$
M^T M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.
$$

(b) On se rappelle du calcul de la jacobienne de l'exercice 2(c), et on remarque que

$$
J_G(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_r & r\cdot\boldsymbol{u}_\theta & r\sin\varphi\cdot\boldsymbol{u}_\varphi\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\sin\varphi\end{pmatrix}.
$$

Comme l'inverse d'un produit de matrice AB est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, et comme $M^{-1} = M^T$, on trouve

$$J_G(r,\theta,\varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\varphi} \end{pmatrix} M^T.$$

(c) Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $\overline{f} = f \circ G$. On cherche l'opérateur $\overline{\nabla}$ tel que

$$\overline{\nabla}\,\overline{f}(r,\theta,\varphi) = \nabla f(x,y,z).$$

Notons

$$H(x,y,z) = (r(x,y,z), \theta(x,y,z), \varphi(x,y,z))$$

le changement de coordonnées inverse, de sorte que $f = \overline{f} \circ H$. Le gradient n'étant rien d'autre que la transposée de la dérivée, il s'agit donc de calculer la transposée de

$$f'(x,y,z) = (\overline{f} \circ H)'(x,y,z) = \overline{f}'(r(x,y,z), \theta(x,y,z), \varphi(x,y,z)) \cdot J_H(x,y,z)$$

et d'exprimer cela en fonction de r, θ, φ. Par la formule pour la dérivée de la réciproque, on trouve $J_H(x,y,z) = J_G(r,\theta,\varphi)^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= \overline{f}'(r,\theta,\varphi) \cdot J_H(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{f}}{\partial r} & \frac{\partial \overline{f}}{\partial \theta} & \frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\varphi} \end{pmatrix} M^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{f}}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} M^T. \end{aligned}$$

Comme $M = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_r & \boldsymbol{u}_\theta & \boldsymbol{u}_\varphi \end{pmatrix}$, on obtient en transposant:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) = \overline{\nabla}\,\overline{f}(r,\theta,\varphi) &= M \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{f}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial r}\boldsymbol{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \theta}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_\varphi. \end{aligned}$$

Solution 5.

On a $f(x,y) = \overline{f}\big(u(x,y), v(x,y)\big) = \overline{f}(2x - y, x + 3y)$. En utilisant la formule pour la dérivation de fonctions composées du cours et la règle de la dérivée d'un produit, on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Les dérivées analogues par rapport à y, c.-à-d. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, sont obtenues en remplaçant x par y ci-dessus. En substituant

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

dans les expressions pour $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\ &= \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\\ &\quad+\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial u\partial v}\left(2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x}+2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\\ &\quad+\frac{\partial \overline{f}}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial \overline{f}}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ &= 5\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial u\partial v}+10\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Solution 6.
Les fonctions F données sont des intégrales dépendant d'un paramètre de la forme

$$F(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx\,.$$

Si les fonctions f, a et b sont de classe C^1, la dérivée de F est (cf. cours)

$$\frac{d}{dt}F(t)=f\big(b(t),t\big)\cdot b'(t)-f\big(a(t),t\big)\cdot a'(t)+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\;. \tag{3}$$

(a) On a $f(x,t)=\frac{x^t+\sin(x)}{\ln(x)}\in C^1\big(]2,3[\times]1,\infty[\big)$, $a(t)=2$ et $b(t)=3$ avec $a,b\in C^1(\mathbb{R})$. Puisque les bornes sont constantes, le membre de droite de (3) consiste uniquement de l'intégrale et on a

$$\begin{aligned}F'(t)&=\int_2^3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^t+\sin(x)}{\ln(x)}\right)dx=\int_2^3\frac{x^t\ln(x)}{\ln(x)}\,dx=\int_2^3 x^t\,dx=\left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_2^3\\ &=\frac{3^{t+1}-2^{t+1}}{t+1}\;.\end{aligned}$$

(b) On a $f(x,t) = \ln(x^2+t^2) \in C^1\big(]1,\infty[\times]1,\infty[\big)$, $a(t) = t$ et $b(t) = t^2$ avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$. Les bornes dépendent de t. On a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d\,(t^2)}{dt} \cdot \ln\Big(\big(t^2\big)^2 + t^2\Big) - \frac{d(t)}{dt} \cdot \ln\big(t^2+t^2\big) + \int_t^{t^2} \frac{\partial}{\partial t}\big(\ln(x^2+t^2)\big)\,dx \\ &= 2t\ln\big(t^2\left(t^2+1\right)\big) - \ln\left(2t^2\right) + \int_t^{t^2} \frac{2t}{x^2+t^2}\,dx\,. \end{aligned}$$

Puisque $2t\displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{x^2+t^2}\,dx = \left[\frac{2t}{t}\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_t^{t^2} = 2\arctan(t) - \frac{\pi}{2}$, on a finalement

$$F'(t) = 2t\ln\big(t^2(t^2+1)\big) - \ln\left(2t^2\right) + 2\arctan(t) - \frac{\pi}{2}\,.$$

Solution 7.

Ces fonctions sont de nouveau de la forme (3).

(a) Ici on a $f(x,t) = \frac{\sin(\cos(tx))}{x} \in C^1\big(\,]0,\infty[\times]0,\infty[\big)$, $a(t) = \sqrt{t}$ et $b(t) = \frac{1}{t}$ avec $a, b \in C^1(\,]0,1[)$. Ainsi

$$\begin{aligned} F'(t) = {} & \frac{\sin\big(\cos\big(t\frac{1}{t}\big)\big)}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{\sin(\cos(t\sqrt{t}))}{\sqrt{t}} \cdot \frac{d}{dt}\big(\sqrt{t}\,\big) \\ & + \int_{\sqrt{t}}^{1/t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(\cos(tx))}{x}\right)dx \end{aligned}$$

Comme $t = 1$, l'intégrale vaut zéro (intégrale de 1 à 1). Ainsi

$$F'(1) = = -\frac{\sin(\cos(1))}{1} - \frac{\sin(\cos(1^{3/2}))}{2\cdot 1} = -\frac{3}{2}\sin(\cos(1)).$$

(b) Pour $f(x,t) = \frac{e^{tx^3}}{x} \in C^1(\,]0,\infty[\times]0,\infty[\,)$, $a(t) = 1$ et $b(t) = \sqrt[3]{t}$ avec $a, b \in C^1(\,]1,\infty[\,)$, seulement la borne supérieure dépend de t si bien que le terme en $f(a(t),t)$ n'apparaît pas.

$$F'(t) = \left.\frac{e^{tx^3}}{x}\right|_{x=\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sqrt[3]{t}\right) + \int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx^3}}{x}\right)dx.$$

A nouveau, comme $t = 1$, l'intégrale vaut zéro (intégrale de 1 à 1). Ainsi

$$F'(1) = \left.\frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{1}{3}\,t^{-2/3}\right|_{t=1} = \frac{1}{3}e.$$