Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.
Soit $f(x,y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \ .$$

Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0, y_0) = (1,1)$:

$$z = 3 + 5(x-1) + 3(y-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x + 3y - z = 5 \ .$$

Solution 2.

- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y + \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\big(x - \frac{\pi}{2}\big) + \frac{2}{\pi}\,(y - \pi)$
- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\,x + \frac{2}{\pi}\,y$
- ■ $z = \frac{2}{\pi}\,y - \frac{4}{\pi}\,x + 4$

L'équation du plan tangent au graphe de f au point $p = (p_1, p_2)$ est

$$z = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot (x - p_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot (y - p_2) \,.$$

En l'occurrence on a

$$f\Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big) = 2 + \big(1 - \cos(\pi)\big)\, \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 = 4$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big) = \Big[-\frac{y}{x^2} + \big(1 - \cos(y)\big) \cdot 2\sin(x)\cos(x)\Big]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)} = -\frac{4}{\pi} \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big) = \Big[\frac{1}{x} + \sin(y)\sin(x)^2\Big]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)} = \frac{2}{\pi} \ .$$

Ainsi l'équation du plan tangent est

$$z = 4 - \frac{4}{\pi}\,\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{2}{\pi}\,(y - \pi) = 4 - \frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi}y \,.$$

Solution 3.
Pour (a), on peut (comme vu au cours) prendre la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } (x,y) \in (\mathbb{R}^*) \times \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } (x,y) \in \{0\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour (b), trois solutions sont proposées:

Solution 1: On prend une fonction non-différentiable en $(0,0)$, avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, par exemple celle vue en cours:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

On y ajoute la fonction C^∞ donnée par $x - y$. La fonction $f(x,y) + x - y$ admet alors les dérivées partielles voulues (par linéarité de la dérivée) et n'est toujours pas différentiable: si elle l'était, alors $\big(f(x,y)+x-y\big) - (x-y) = f(x,y)$ le serait aussi, car la somme de fonctions différentiables est différentiable.

Solution 2: Une possible fonction est :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

dont les dérivées partielles en $(0,0)$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x} = 1\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-\frac{y^5}{y^4} - 0}{y} = -1\,. \end{aligned}$$

Pour étudier la différentiabilité supposons que f soit différentiable en $(0,0)$. Par définition de la différentiabilité (voir cours), on a alors

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0+x, 0+y) &= f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y)\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| \\ &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ y + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$. Puisque $f(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$ on a que

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^4 y - x y^4}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

mais sur une suite de la forme $(x, 2x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} (0,0)$ on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varepsilon(x,2x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-14x^5}{17\sqrt{5}x^5} = -\frac{14}{17\sqrt{5}} \neq 0\,,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est différentiable en $(0,0)$.

Solution 3: O va construire la fonction f. Posons

$$f(x,y) = x - y + \sqrt{x^2+y^2}\varepsilon(x,y)$$

avec $\varepsilon(x,y)$ à déterminer et tel que $\varepsilon(0,0) = 0$ (voir définition de différentiable). Ainsi on peut évaluer f en $(0,0)$ et on obtient $f(0,0) = 0$. On veut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, donc il faut que

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + |h|\varepsilon(h,0)}{h} = 1 + \lim_{h\to 0} \operatorname{sign}(h)\varepsilon(h,0),$$

qui est vrai si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h,0) = 0$. De manière similaire, on a que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$ si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(0,h) = 0$. Mais on veut que f ne soit pas différentiable, donc il faut que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y)$ n'existe pas. Prenons par exemple

$$\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } y = x^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ce choix de $\varepsilon(x,y)$ on a que f satisfait les hypothèses de l'exercice car $\varepsilon(0,0) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h,0) = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(0,h) = 0$, ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$. De plus f n'est pas différentiable car

$$0 = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h,0) \neq \lim_{h\to 0} \varepsilon(h,h^2) = 1,$$

et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y)$ n'existe pas.

Remarque: On voit que si $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 selon la direction des axes x et y alors les dérivées partielles de f en x et y existent. Mais ceci n'est pas suffisant pour que f soit différentiable, pour ceci il faut que $\varepsilon(x_n,y_n)$ converge vers 0 pour toutes les suites (x_n,y_n) telles que $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ et $\lim\limits_{n\to 0}(x_n,y_n) = (0,0)$.

Solution 4.

(a) Par définition des ensembles C^k, il suffit de trouver une fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est C^0 mais pas C^1, et on pourra alors construire un exemple $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donné par

$$f(x,y) = (g(x,y), 0, 0, 0)$$

On considère $g(x,y) = |x|$. C'est une fonction continue: si $(x_k,y_k) \longrightarrow (x_0,y_0)$, alors $|x_k| \longrightarrow |x_0|$ par continuité de la valeur absolue. Elle est donc de classe C^0. Par contre, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

et cette limite n'existe pas. Elle n'est donc pas de classe C^1.

(b) Il suit du cours que la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe C^1. Sa dérivée est

$$g'(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & 0 \end{pmatrix} & \text{si } x \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On définit comme au (a) la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ par

$$f(x,y) = (g(x,y), 0, 0, 0).$$

Cette fonction n'est pas de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}^2$ (sinon g serait de classe C^1 aussi, par définition de C^1).

Par contre elle est différentiable en tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$: En effet, cela suit d'une remarque du cours (disant que $f = (f_1, \ldots, f_m)$ est différentiable si et seulement si toutes les fonctions composantes sont différentiables). Alternativement, on peut le voir comme suit: Si $x_0 \neq 0$, cela suit du fait qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (on calcule les dérivées partielles de toutes les fonctions composantes, et on vérifie qu'elles sont continues). Et si $x_0 = 0$, sa dérivée $f'(0, y_0)$ est donnée par:

$$f'(0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, on a $f(0,y_0) = (0,0,0,0)$, et on vérifie (condition équivalente à la différentiabilité) que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(0,y_0) - f'(0,y_0)(x, y-y_0)}{\|(x, y-y_0)\|}$$
$$= \left(\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{g(x,y)}{\|(x,y-y_0)\|}, 0, 0, 0 \right) = (0,0,0,0)$$

puisque $g(x,y)$ est différentiable en $(0, y_0)$.

(c) On procède comme au (a). La foncton $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = |x|^5$ est C^4 mais pas C^5: En effet, pour $x > 0$, on a $h(x) = x^5$, et donc $h^{(4)}(x) = (5!)x = 120x$, et si $x < 0$, on a $h(x) = -x^5$, d'où $h^{(4)}(x) = -(5!)x = -120x$. On trouve alors $h^{(4)}(x) = 120|x|$ (cf Analyse 1), qui est une fonction continue, mais pas dérivable. Cela montre que h est C^4 mais pas C^5.

On construit alors $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = h(x)$, et on vérifie qu'elle est toujours C^4 mais pas C^5 (la dérivée partielle en x est ce qu'on vient de calculer, et celle en y est identiquement 0), puis finalement, on construit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x,y) = (g(x,y), 0, 0, 0)$, qui est donc C^4 sans être C^5 par définition.

Solution 5.
On a, pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{h} = f(\boldsymbol{x}) + A\boldsymbol{h}.$$

Ainsi

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + A\,\boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|$$

avec $\varepsilon(\boldsymbol{h}) = \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0}$ lorsque $\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}$. Par définition, la fonction est donc différentiable en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, et la dérivée est $f'(\boldsymbol{x}) = A$.

Solution 6.
On a $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) =$

- ☐ $2\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ■ $2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ☐ $2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1)$

La fonction f est définie par

$$f(u,v) = g\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial g}{\partial x}\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big)\cdot ve^{-2u}\cdot(-2)\\ &\quad+\frac{\partial g}{\partial y}\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big)\cdot 2ue^{-v}\\ &\quad+\frac{\partial g}{\partial z}\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big)\cdot 1\end{aligned}$$

et comme $\Big[\,(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u)\,\Big]_{(u,v)=(1,0)} = (0,1,1)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) &= \frac{\partial g}{\partial x}\,(0,1,1)\cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial y}\,(0,1,1)\cdot 2 + \frac{\partial g}{\partial z}\,(0,1,1)\cdot 1\\ &= 2\,\frac{\partial g}{\partial y}\,(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}\,(0,1,1)\,.\end{aligned}$$

Solution 7.
On rappelle que la matrice jacobienne n'est rien d'autre que la dérivée totale $u'(x,y)$.

(a) Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $u(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y)) = (-y, x, x+y)$. Sa matrice jacobienne est

$$J_u(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u_3}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

(b) On calcule d'abord les matrices jacobiennes de chaque application:

$$J_v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

et

$$J_w(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial w_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial w_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial w_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial w_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial w_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2 \\ 2x & 2y & 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} J_{w\circ v}(x,y) &= \begin{pmatrix} 2v_1(x,y) & 2v_2(x,y) & -2 \\ 2v_1(x,y) & 2v_2(x,y) & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2y & 2x & -2 \\ -2y & 2x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x-2y & 2y-2x \\ 2x+2y & 2x+2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En calculant $w \circ v$ on vérifie aisément ce résultat. En effet,

$$(w\circ v)(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-2xy \\ x^2+y^2+2xy \end{pmatrix}$$

et la matrice jacobienne de cette application est bien celle trouvée par multiplication matricielle ci-dessus.

(c) On calcule et on trouve:

$$J_v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & e^{y+2z} & 2e^{y+2z} \\ 2x & z & y \end{pmatrix}$$

et

$$J_w(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} J_{w\circ v}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} -\sin\, v_1(x,y) & 0 \\ 0 & \cos\, v_2(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^{y+2z} & 2e^{y+2z} \\ 2x & z & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(e^{y+2z}) & 0 \\ 0 & \cos(x^2+yz) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^{y+2z} & 2e^{y+2z} \\ 2x & z & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{y+2z}\sin(e^{y+2z}) & -2e^{y+2z}\sin(e^{y+2z}) \\ 2x\cos(x^2+yz) & z\cos(x^2+yz) & y\cos(x^2+yz) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part, en calculant $w \circ v$ on vérifie ce résultat:

$$(w \circ v)(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(v_1(x, y, z)) \\ \sin(v_2(x, y, z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(e^{y+2z}) \\ \sin(x^2 + yz) \end{pmatrix}.$$

Solution 8.

(a) Pour vérifier que $v(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$ il suffit de calculer $||v(x, y)||^2$ et de vérifier que le résultat est égal à 1. Il s'agit d'un simple calcul. Pour la matrice jacobienne de v on trouve

$$\begin{aligned} J_v(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v_3}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1 - x^2 + y^2) & -4xy \\ -4xy & 2(1 + x^2 - y^2) \\ -4x & -4y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) La matrice jacobienne de w est donnée par

$$\begin{aligned} J_w(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial w_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial w_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial w_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial w_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial w_2}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 + z)^2} \begin{pmatrix} 1 + z & 0 & -x \\ 0 & 1 + z & -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) On calcule et on trouve

$$\begin{aligned} w(v(x, y)) &= w\left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y) = (x, y) \end{aligned}$$

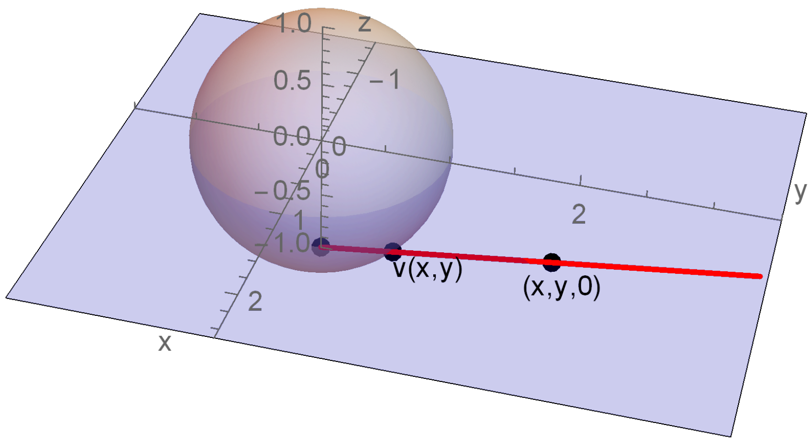
Par la règle de composition on trouve

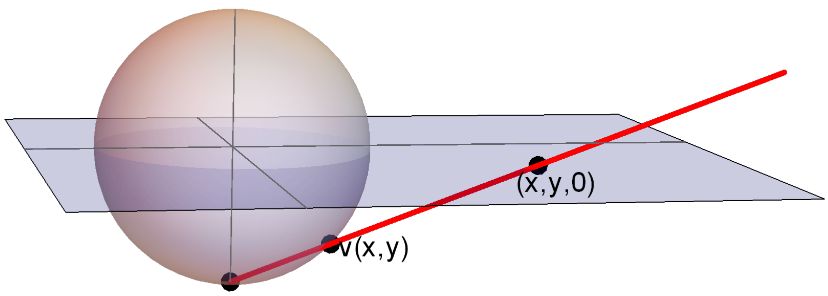
$$\begin{aligned} J_{w \circ v}(x, y) = &\frac{1}{(1 + v_3(x, y))^2} \begin{pmatrix} 1 + v_3(x, y) & 0 & -v_1(x, y) \\ 0 & 1 + v_3(x, y) & -v_2(x, y) \end{pmatrix} \\ &\cdot \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1 - x^2 + y^2) & -4xy \\ -4xy & 2(1 + x^2 - y^2) \\ -4x & -4y \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

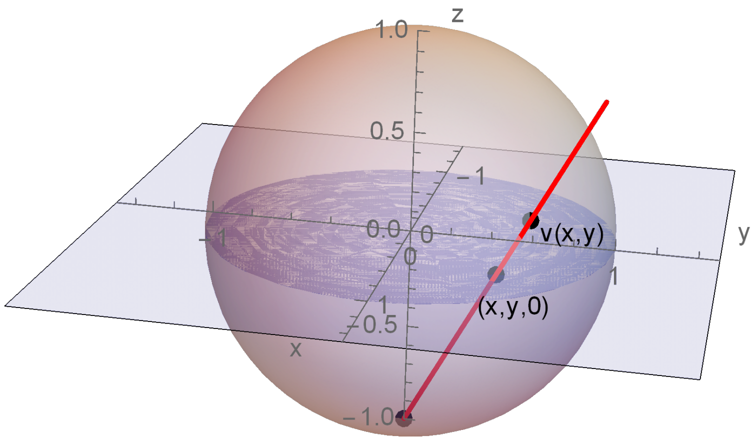
D'autre part, puisque $w \circ v$ est l'identité, sa matrice jacobienne est la matrice identité.

(d) En fixant une source lumineuse sur le point $(0,0,-1)$ de la sphère, l'image $w(x,y,z)$ d'un point (x,y,z) sur la sphère est l'"ombre" du point sur le plan. En d'autres termes, $(w(x,y,z),0) \in \mathbb{R}^3$ est le point d'intersection entre la droite passant par $(0,0,-1)$ et (x,y,z), et le plan horizontal $z=0$. Réciproquement, pour un point (x,y) du plan, l'image $v(x,y)$ est l'intersection entre la droite passant par $(0,0,-1)$ et $(x,y,0)$, et la sphère unité.

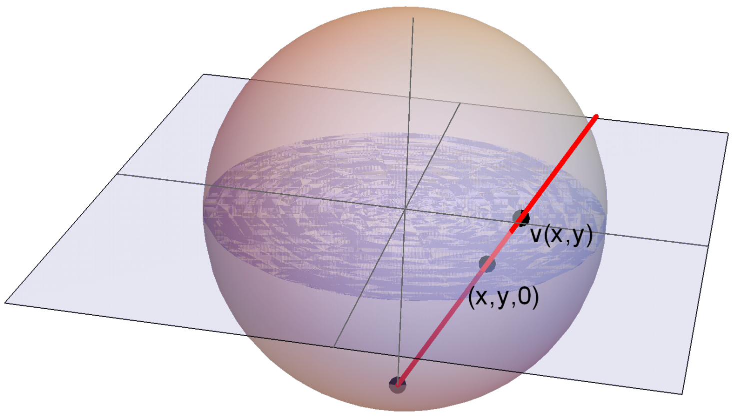
Pour vérifier cela, le plus simple est de montrer que les trois points $\boldsymbol{p} = (0,0,-1), \boldsymbol{q} = (x,y,0)$, et $\boldsymbol{r} = v(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)$. sont toujours alignés, en vérifiant que le produit vectoriel $(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \times (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})$ est nul.







z
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1
0
1
x
y
v(x,y)
(x,y,0)



v(x,y)
(x,y,0)