Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.
On calcule avec les règles habituelles de la dérivation en gardant chaque fois une variable constante:

(a) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (2x + x^2y + y^3)e^{xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (2y + x^3 + xy^2)e^{xy}$.

(b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sin(x)+xy\cos(x)}{xy\sin(x)} = \frac{1}{x} + \cot(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\sin(x)}{xy\sin(x)} = \frac{1}{y}$.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{yz}{1+(xyz)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xz}{1+(xyz)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{xy}{1+(xyz)^2}$.

(d) Ici on se rappelle que $x^y = e^{y\ln(x)}$ et donc $f(x,y,z) = (x^y)^z = e^{z\ln(x^y)} = e^{yz\ln(x)} = x^{yz}$. Nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yzx^{yz-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z\ln(x)x^{yz} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y\ln(x)x^{yz}$$

Solution 2.

(a) On a $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, c.-à-d. le plan $\mathbb{R}^2$ sans les deux axes x et y. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\ .$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3}\ .$$

(b) Comme les puissances avec exposant réel sont seulement définies pour des bases positives, on doit avoir $x > 0$ et $y > 0$. Pour z il n'y a pas de restriction si bien que $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$. Pour les dérivées partielles on obtient directement $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^z\, x^{(y^z)-1}$.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$, il faut récrire f de manière adéquate. Pour dériver par rapport à y on écrit

$$\begin{aligned} &f(x,y,z) = \exp(y^z \ln(x)) \\ &\qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \exp(y^z\ln(x)) \cdot z\, y^{z-1}\ln(x) = x^{(y^z)} z\, y^{z-1} \ln(x)\,, \end{aligned}$$

et pour dériver par rapport à z, on écrit

$$f(x,y,z) = \exp\big(\exp\left(z\ln(y)\right)\cdot\ln(x)\big)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \exp\Big(\exp\left(z\ln(y)\right)\ln(x)\Big)\cdot\ln(y)\exp\big(z\ln(y)\big)\ln(x)\\ &= x^{(y^z)}y^z\ln(x)\ln(y)\,.\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{x^{y^z-1}\left(y^z-1\right)y^z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{x^{y^z}\left(y^z\right)^2z^2\left(\ln(x)\right)^2}{y^2} + \frac{x^{y^z}y^zz^2\ln(x)}{y^2} - \frac{x^{y^z}y^zz\ln(x)}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = x^{y^z}\left(y^z\right)^2\left(\ln(y)\right)^2\left(\ln(x)\right)^2 + x^{y^z}y^z\left(\ln(y)\right)^2\ln(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = \frac{x^{y^z-1}\left(y^z\right)^2z\ln(x)}{y} + \frac{x^{y^z-1}y^zz}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = \frac{x^{y^z}y^zy^{z-1}z\ln(x)}{x} + \frac{x^{y^z}y^{z-1}z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) = \frac{x^{y^z}\left(y^z\right)^2\ln(y)\ln(x)}{x} + \frac{x^{y^z}y^z\ln(y)}{x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)\\ &= \frac{x^{y^z}\left(y^z\right)^2\ln(y)\left(\ln(x)\right)^2z}{y} + \frac{x^{y^z}y^z\ln(y)\,z\ln(x)}{y} + \frac{x^{y^z}y^z\ln(x)}{y}\end{aligned}$$

(c) On a $D(f) = \mathbb{R}^2$. Pour les dérivées partielles on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy\cos(x^2y)\cosh(y-x) - \sin(x^2y)\sinh(y-x)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2\cos(x^2y)\cosh(y-x) + \sin(x^2y)\sinh(y-x)\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =& 2\,y\cos\left(x^2y\right)\cosh(-y+x) - 4\,x^2y^2\sin\left(x^2y\right)\cosh(-y+x)\\ &+4\,xy\cos\left(x^2y\right)\sinh(-y+x) + \sin\left(x^2y\right)\cosh(-y+x)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\,x^4 \sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right) - 2\,x^2\ \ \left(x^2y\right)\sinh\left(-y+x\right) +$$
$$+\sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) =$$
$$= 2\,x\cos\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right) - 2\,x^3y\sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)$$
$$-2\,xy\cos\left(x^2y\right)\sinh\left(-y+x\right) + x^2\cos\left(x^2y\right)\sinh\left(-y+x\right)$$
$$-\sin\left(x^2y\right)\cosh\left(-y+x\right)$$

(d) Le domaine est $D(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 2\}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$ sans le plan $z=2$. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2}{z-2}\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{6z}{z-2}\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2\left(\frac{3y}{z-2} - \frac{x+3yz}{(z-2)^2}\right)\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2\,\frac{1}{(z-2)^2}\left(\left(\cosh\left(\frac{x+3\,yz}{z-2}\right)\right)^2 + \left(\sinh\left(\frac{x+3\,yz}{z-2}\right)\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 18\,\frac{z^2}{(z-2)^2}\left(\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2 + \left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2\left(3\,\frac{y}{z-2} - \frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)^2\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2$$
$$+\,2\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\left(-6\,\frac{y}{(z-2)^2} + 2\,\frac{3\,yz+x}{(z-2)^3}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)$$
$$+\,2\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2} - \frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)$$
$$= 6\,\frac{z}{(z-2)^2}\left(\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2 + \left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) \\
&= 2\,\frac{1}{z-2}\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2 \\
&- 2\,\frac{1}{(z-2)^2}\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right) \\
&+ 2\,\frac{1}{z-2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) &= 6\,\frac{z}{z-2}\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2 \\
&+ 6\,\frac{1}{z-2}\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right) \\
&- 6\,\frac{z}{(z-2)^2}\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right) \\
&+ 6\,\frac{z}{z-2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 6\,\frac{z}{z-2}\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)\left(\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2 \\
&+ 2\,\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\left(3\,(z-2)^{-1}-3\,\frac{z}{(z-2)^2}\right)\cosh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right) \\
&+ 6\,\frac{z}{z-2}\left(\sinh\left(\frac{3\,yz+x}{z-2}\right)\right)^2\left(3\,\frac{y}{z-2}-\frac{3\,yz+x}{(z-2)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Solution 3.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$ les dérivées partielles sont

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = xy\,\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}+y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ , \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = xy\,\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}+x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ .
\end{aligned}
$$

Pour $(x,y)=(0,0)$, on utilise la définition de la dérivée partielle :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Pour calculer les deuxièmes dérivées partielles mixtes en $(0,0)$, on doit encore une fois utiliser cette définition. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-h) - 0}{h} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 0}{h} = +1.$$

On constate que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Remarque: Dans un cas comme ici où les dérivées partielles mixtes ne sont pas égales, il faut faire attention à la notation qui n'est malheureusement pas vraiment standardisée. Lorsqu'on a d'abord dérivé par rapport à x et ensuite par rapport à y, on écrit dans ce cours $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Dans la littérature et en particulier aussi dans le livre *Calcul différentiel et intégral* de Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, on voit aussi l'inverse (i.e. x et y échangé). Vive donc les fonctions suffisamment régulières où ce problème ne se pose pas...

Solution 4.

■ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\left(\cos(y)^2 - \sin(y)\right) \end{pmatrix}$

□ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\cos(y)^2 \end{pmatrix}$

□ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} x^2\left(\cos(y)^2 - \sin(y)\right) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & 2 \end{pmatrix}$

□ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \end{pmatrix}$

Solution 5.
La dérivée f' d'une fonction f dérivable de deux variables au point (x_0, y_0) est donnée par

$$f'(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right).$$

Pour simplifier l'écriture, on va omettre le (x_0, y_0) dans la suite. On a donc

(a)
$$\begin{aligned} f' &= \left(\frac{\partial(g+h)}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial(g+h)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial h}{\partial y} \right) = g' + h' \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f' &= \left(\frac{\partial(gh)}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial(gh)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} h + g \frac{\partial h}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial g}{\partial y} h + g \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= h \left(\frac{\partial g}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial g}{\partial y} \right) + g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial h}{\partial y} \right) = h\,g' + g\,h' \end{aligned}$$

(c)
$$f' = \left(\frac{\partial(g/h)}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial(g/h)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x} h - g \frac{\partial h}{\partial x}}{h^2} \;\middle|\; \frac{\frac{\partial g}{\partial y} h - g \frac{\partial h}{\partial y}}{h^2} \right)$$
$$= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{g}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \;\middle|\; \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{1}{h} g' - \frac{g}{h^2} h'$$

Solution 6.

(a) Cette fonction est égale à $\dfrac{2xy}{x^2+y^2+1}$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ! (Pas de problème en $(0,0)$, gotcha). C'est donc juste une fonction rationnelle, qui est C^∞ sur $D = \mathbb{R}^2$. On a donc $D = \mathbb{R}^2$ pour (i), (ii), (iii), (iv).

(b) Pour (i), la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (composée de log qui est continue, et de fonctions polynômiales, également continues). En $(x,y) = (0,0)$ on passe en coordonnées polaires: $|f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))| \leq r^2 \log(r) \longrightarrow 0$ et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Ainsi f est continue sur $D = \mathbb{R}^2$.

Pour (ii), si $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

et les dérivées partielles en $(x,y) = (0,0)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot 0 \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot h \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Ainsi, les dérivées partielles existent sur tout $D = \mathbb{R}^2$.

Pour (iii), on remarque déjà que les dérivées partielles calculées en (ii) sont continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$, car il s'agit à nouveau d'une composée de fonctions continues. Ainsi f est C^1, au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et par un théorème du cours, f est donc aussi différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour traiter le cas $(x,y) = (0,0)$, le plus simple est de sauter directement à (iv), où l'on constate que f est en fait C^1 sur $D = \mathbb{R}^2$ tout entier, et donc également différentiable sur $D = \mathbb{R}^2$.

Alternativement, on peut traiter le cas $(x,y) = (0,0)$ à l'aide d'un calcul de limites: il faut vérifier que (cf condition équivalente à la dérivabilité, vue en cours)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)^T \binom{x}{y}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Un passage en cooreonnées polaires donne alors:

$$\left| \frac{xy\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq r\log(r) \longrightarrow 0$$

et la limite vaut donc bien 0. Ainsi f est différentiable sur $D = \mathbb{R}^2$.

Pour (iv), on remarque que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que compositions de fonctions continues. Pour étudier leur continuité en $(0,0)$, on utilise les coordonnées polaires. On trouve

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|r\sin(\theta)\ln(r^2) + 2\frac{r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)}{r^2}\right| \leq 2|r\ln(r)| + 2r$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|r\cos(\theta)\ln(r^2) + 2\frac{r^3\cos(\theta)\sin(\theta)^2}{r^2}\right| \leq 2|r\ln(r)| + 2r$$

On calcule la limite du premier terme dans ces expressions avec Bernoulli-L'Hospital :

$$\lim_{r\to 0^+} r\ln(r) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(r)}{\frac{1}{r}} \overset{BH}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = -\lim_{r\to 0^+} r = 0\,.$$

Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.$$

Les dérivées partielles de f sont continues sur tout $\mathbb{R}^2$, et f est donc de classe C^1 sur $D = \mathbb{R}^2$.

(c) Commençons par observer que sur $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1 + x^2/y^4} = \frac{y^4}{x^2+y^4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) - \frac{2xy^3}{x^2+y^4}$$

Ces fonctions sont continues car composition de fonctions continues et de fonctions rationnelles. Ainsi, f est de classe C^1, donc différentiable et continue sur et les dérivées partielles existent sur A. Il reste à voir ce qui se passe aux points de la forme $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Pour (i), observons que $f(x,y) = 0$ si $y = 0$, et si $y \neq 0$, comme arctan prend des valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $|f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}y^2$. Dans les deux cas, on a donc la borne

$$|f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}y^2 \longrightarrow 0$$

lorsque $y \to 0$. Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\pi}{2}y^2 = 0 = f(x_0,0).$$

Cela montre donc que f est continue en tout $(x_0, 0)$, et donc sur tout $D = \mathbb{R}^2$.

Pour (ii), on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \arctan(x_0/h)}{h} = 0$$
car $\arctan(\cdot)$ est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Ainsi, les dérivées partielles existent sur tout $D=\mathbb{R}^2$.

Pour (iii), on vérifie la condition équivalente à la différentiabilité en $(x_0,0)$: On doit montrer que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,0)-\nabla f(x_0,0)^T \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y \end{pmatrix}}{\|(x-x_0,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x-x_0,y)\|}$$

vaut 0. En bornant $|f(x,y)| \le \frac{\pi}{2}y^2$, puis en utilisant les coordonnées polaires **centrées en** $(x_0,0)$, i.e. $(x,y)=(x_0+r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, on trouve

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x-x_0,y)\|} \le \frac{\pi}{2}\frac{y^2}{\|(x-x_0,y)\|} = \frac{\pi}{2}\frac{r^2\sin^2\varphi}{r} \le \frac{\pi}{2} r \longrightarrow 0$$

lorsque $r\to 0$. Cela montre que f est différentiable en tout $(x_0,0)$, et donc sur tout l'ensemble $D=\mathbb{R}^2$.

Finalement, pour (iv), les calculs précédents montrent que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^4} & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\arctan(\frac{x}{y^2}) - \frac{2xy^3}{x^2+y^4} & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0. \end{cases}$$

Supposons d'abord que $x_0 \neq 0$. Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, on remarque que l'expression se simplifie en $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^4}$ si $(x,y)\neq(0,0)$. Comme c'est une fonction rationnelle, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, prenons une suite (x_n,y_n) qui converge vers $(x_0,0)$, le fait que $\arctan(\cdot)\in[-\pi/2,\pi/2]$ implique

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n) = \begin{cases} 2y_n\arctan(\frac{x_n}{y_n^2}) - \frac{2x_ny_n^3}{x_n^2+y_n^4} \longrightarrow 0 - \frac{0}{x_0^2+0} = 0 & \text{si } y_n\neq 0 \\ 0 \longrightarrow 0 & \text{si } y_n = 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n) \longrightarrow 0$, d'où

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0),$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est donc continue en $(x_0,0)$.

Les deux dérivées partielles sont donc continues en $(x_0, 0)$ dès que $x_0 \neq 0$. Cela montre que f est de classe C^1 sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Il reste le cas où $x_0 = 0$. Dans ce cas, on observe que pour la suite $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = 0 \longrightarrow 0,$$

alors que si $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{(1/n)^4}{0 + (1/n)^4} = 1 \longrightarrow 1.$$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est donc pas continue en $(0,0)$, et f n'est donc pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$, mais seulement sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(En revanche, on peut vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *est continue en* $(0,0)$ *!)*

(d) Pour (i), remarquons que f est une composée de fonctions continues, donc continue sur $D = \mathbb{R}^2$.

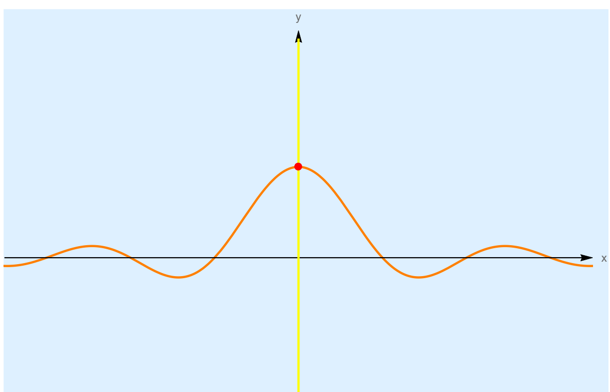
Pour (ii)-(iv), les seuls problèmes peuvent venir lorsque que le terme dans la valeur absolue est 0, i.e. lorsque

$$xy - \sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x \neq 0 \text{ et } y = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Notons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{\sin(x)}{x}.\}$. En effet, pour $(x,y) \notin A \cup B$, on a $f(x,y) = \pm x(xy - \sin(x))$, et les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \pm 2xy - x\cos(x) - \sin(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \pm x^2$$

qui sont continues. La fonction f est donc une fonction C^1 au moins sur $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$. D_1 est déssiné en bleu dans la figure ci-dessous, avec les ensembles A en jaune et B en orange ; le point $(0,1)$ est en rouge et sera d'une importance particulière pour (iii) et (iv).



Pour (ii), il faut encore traiter les points de $A \cup B$. Traitons d'abord les points de B, i.e., de la forme (x_0, y_0), où $x_0 \neq 0$ et $y_0 = \dfrac{\sin(x_0)}{x_0}$. On calcule la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide de la définition:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x_0 \,|x_0(y_0 + h) - \sin(x_0)|}{h} = \lim_{h \to 0} x_0 |x_0| \cdot \frac{|h|}{h},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité suit du fait que $x_0 y_0 - \sin(x_0) = 0$. Comme cette limite n'existe pas, on conclut que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'existe en aucun point (x_0, y_0) de B.

Pour les points de A, c'est à dire de la forme $(0, y_0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y_0) - f(, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h|hy_0 - \sin(h)|}{h} = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, y_0 + h) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Ainsi, les dérivées partielles existent en tout point $(0, y_0) \in A$. Pour (ii), on a donc $D = \mathbb{R}^2 \setminus B$.

Pour (iv), on sait que f est C^1 sur $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$. De plus, pour tout $(0, y_0) \in A$ différent de $(0, 1)$, les dérivées partielles sont définies dans un voisinage de $(0, y_0)$. En prenant les formules calculées plus haut, on voit facilement que

$$\lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0).$$

Ainsi, les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus (B \cup \{(0, 1)\})$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas définie sur B, elle n'est définie dans aucun voisinage de $(0, 1)$, et ne peut donc pas être continue en $(0, 1)$. On a donc bien trouvé l'ensemble le plus grand pour (iv): c'est $D = \mathbb{R}^2 \setminus (B \cup \{(0, 1)\})$.

Pour (iii), on sait que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (B \cup \{(0, 1)\})$, car elle est C^1 sur cet ensemble. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas définie sur B, f ne peut pas être différentiable en un point de B. Il reste donc seul le point $(0, 1)$ à traiter: il faut vérifier que

$$\lim_{(x,y) \to (0,1)} \frac{f(x, y) - f(0, 1) - \nabla f(0, 1)^T \binom{x-0}{y-1}}{\|(x, y) - (0, 1)\|} = \lim_{(x,y) \to (0,1)} \frac{x|xy - \sin(x)|}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0.$$

En coordonnées polaires centrées en $(0, 1)$, i.e. $(x, y) = (r\cos(\varphi), 1 + r\sin(\varphi))$, on trouve

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x|xy-\sin(x)|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\right| &= \frac{r|\cos(\varphi)|\cdot|r\cos(\varphi)(1+r\sin(\varphi))-\sin(r\cos(\varphi))|}{r} \\
&\leq r|\cos(\varphi)(1+r\sin(\varphi))|+|\sin(r\cos(\varphi))| \\
&\leq 2r+|r\cos(\varphi)| \\
&\leq 3r \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

lorsque $r \to 0$, où l'on a utilisé l'inégalité $|\sin(u)| \leq |u|$ pour u proche de 0. Ainsi f est différentiable en $(0,1)$. Pour (iii), on peut donc prendre $D = \mathbb{R}\setminus B$.

Récapitulatif:

(i) $D = \mathbb{R}^2$

(ii) $D = \mathbb{R}^2 \setminus B$ où $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{\sin(x)}{x}.\}$

(iii) $D = \mathbb{R}^2 \setminus B$

(iv) $D = \mathbb{R}^2 \setminus (B \cup \{(0,1)\})$

Solution 7.

(a) Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent.

■ Vrai ☐ Faux

Voir une proposition du cours.

(b) Si f est de classe C^2, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

☐ Vrai ■ Faux

Pour une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 on a pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

mais il n'existe en général aucun lien entre les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Un contre exemple explicite est donné par $f(x,y) = x$.

(c) Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0\,.$$

■ Vrai ☐ Faux

Découle de la définition de différentiable vue en cours.

(d) Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0\,.$$

■ Vrai ☐ Faux

Découle de la définition de différentiable vue en cours.

(e) Si f est de classe C^2, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h^2, y_0) - f(x_0,y_0)}{h^2}$.

☐ Vrai ■ Faux

La formule correcte est:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{h}\ .$$

Un contre exemple explicite est donné par $f(x,y) = x$.