Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

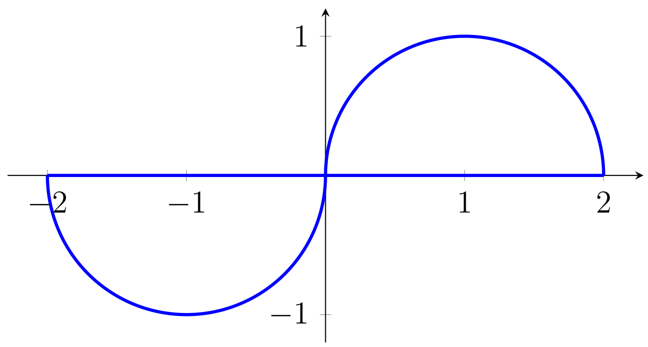
Solution 1.

(a) Les fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_1(t) = (1+\cos(t), \sin(t))$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_2(t) = (-1-\cos(t), \sin(t))$ et $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_3(t) = (-2-2\pi+t, 0)$ sont différentiables sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier continues sur $\mathbb{R}$. Puisque $f_1(\pi) = f_2(\pi)$ et $f_2(2\pi) = f_3(2\pi)$, on a

$$\lim_{t\to\pi^-} f(t) = \lim_{t\to\pi^+} f(t) = f(\pi) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 2\pi^-} f(t) = \lim_{t\to 2\pi^+} f(t) = f(2\pi)$$

ce qui montre que la fonction f est continue.

(b) L'image de f est (le segment $[-2,2]$ fait partie de l'image)



(c) La fonction f n'est pas injective car on a :

$$f(0) = f(2\pi+4) = (2,0) \text{ ou encore } f(\pi) = f(2\pi+2) = (0,0)\ .$$

(d) La fonction f n'est pas différentiable en $t = 2\pi$, mais f_1, f_2 et f_3 sont différentiables. On a :

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{\pi} ||f_1'(t)||\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} ||f_2'(t)||\, dt + \int_{2\pi}^{2\pi+4} ||f_3'(t)||\, dt \\
&= \int_0^{\pi} 1\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} 1\, dt + \int_{2\pi}^{2\pi+4} 1\, dt \\
&= 2\pi + 4\ .
\end{aligned}$$

Solution 2.

(a) En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$ on a

$$3x^3 - 2y^3 = r^3\left(3\cos(\varphi)^3 - 2\sin(\varphi)^3\right) \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2 = r^2$$

et donc

$$|f(x,y)| = r\left|3\cos(\varphi)^3 - 2\sin(\varphi)^3\right| \leq r\cdot 5 \longrightarrow 0$$

lorsque $(x, y) \to 0$. Il s'en suit que la fonction $\hat{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction f en $(0,0)$. Le graphe de $\hat{f}$ se trouve à la Fig. 1.

(b) On considère les limites de deux cas particuliers de f:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{5x^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,2x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2\,.$$

(Formellement, cela revient à considérer les deux suites $(\frac{1}{n}, 0)$ et $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$, et constater que les limites ne sont pas les mêmes). Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'admet donc pas de prolongement par continuité en $(0,0)$ (voir Fig. 2 pour le graphe).

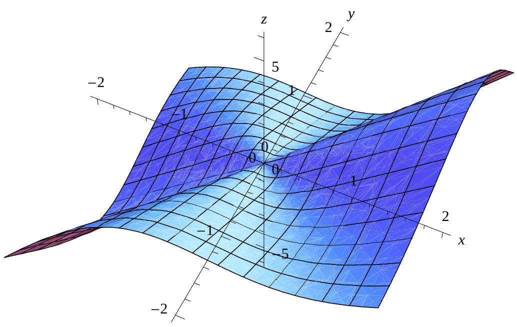


FIGURE 1 –

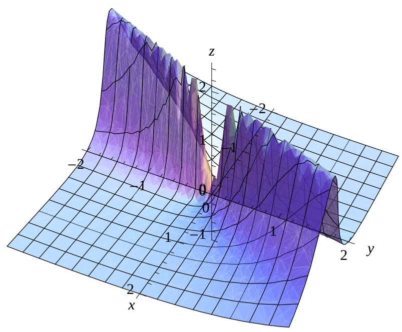


FIGURE 2 –

(c) On utilise encore une fois les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(r)}{r^2}$, et comme cette expression ne dépend plus de φ, on peut calculer la limite à deux variables un utilisant une limite à une variable:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r)^2}{r^2(1+\cos(r))} \\ &= \lim_{r\to 0} \left(\frac{\sin(r)}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(r)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La fonction $\hat{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est donc le prolongement par continuité de f en $(0,0)$ (graphe de $\hat{f}$ à la Fig. 3).

(d) Comme on a

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} t^2 \, \frac{0}{4t^4} = 0\,,$$

on devrait avoir $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ pour qu'un prolongement par continuité de f en $(0,0)$ existe. Or, en considérant la limite $f(2t,t)$ on trouve

$$\lim_{t\to 0} f(2t,t) = \lim_{t\to 0} 2t^2 \, \frac{4t^2 - t^2}{(4t^2+t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{6t^4}{25t^4} = \frac{6}{25} \neq 0\,.$$

Ainsi f ne peut pas être prolongé par continuité au point $(0,0)$ (voir Fig. 4).

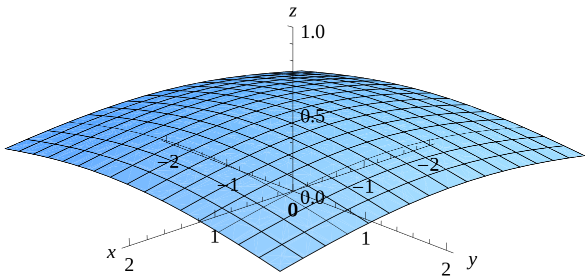


FIGURE 3 –

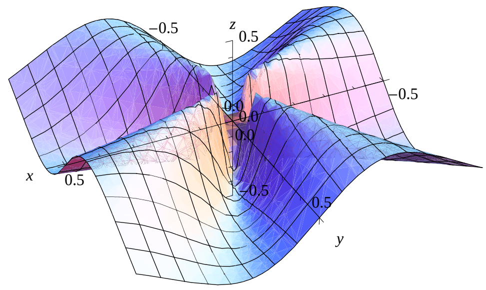


FIGURE 4 –

Solution 3.

(a) Cette fonction est continue en (2,1), d'où $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-3y}{x+2y^2} = \frac{4-3}{2+2} = \frac{1}{4}$.

(b) Cette fonction s'écrit $f(x,y) = f_1(u) = \dfrac{\tan(u)}{u}$, où $u = u(x,y) = 3x^2+y^2$. Comme u est continue en $(0,0)$, et $\neq 0$ si $(x,y)\neq(0,0)$, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(3x^2+y^2)}{3x^2+y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} \cdot \frac{1}{\cos(u)} = 1$$

par un résultat du cours.

(c) Ici, le passage en coordonnées polaires est tentant mais hélas inutile (et mène souvent à une faute). En effet, en posant $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, on a

$$f(x,y) = \frac{r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2(\cos^2(\varphi)+r^2\sin^4(\varphi))} = r\cdot\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)+r^2\sin^4(\varphi)}$$

Ce raisonnement est correct, mais c'est le passage d'une limite à 2 variables (x,y) vers une limite à une variable r qui est faux. En effet, ici, la limite lorsque $r\to 0$ vaut zéro: Si $\cos(\varphi)=0$, alors l'expression vaut 0, et sinon, l'expression tend vers $0\cdot\frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)+0} = 0$. Le problème est qu'en faisant varier r tout seul, on a effectivement "fixé" φ.

Il serait plus correct de dire que φ peut dépendre de r: $\varphi = \varphi(r)$, (et la limite à calculer serait donc $r\cdot\frac{\cos(\varphi(r))\sin^2(\varphi(r))}{\cos^2(\varphi(r))+r^2\sin^4(\varphi(r))}$ ce qui est une autre paire de manches !), mais même là c'est trop restrictif: on peut avoir "plusieurs φ pour le même r", et donc $\varphi(r)$ n'est pas forcément bien défini...

Un dernier espoir serait de borner le terme $\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)+r^2\sin^4(\varphi)}$ comme dans l'exercice 2(a), mais en essayant, on s'aperçoit que si φ est suffisamment proche de $\pi/2$ et r suffisament petit, le dénominateur peut être très petit, et donc l'expression très grande...

En effet, cette limite n'existe pas. On peut le voir directement sans passer par les coordonnées polaires: Sur une suite de points de la forme $(x_n, 0)$, avec $x_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n, 0) = \dfrac{x_n \cdot 0^2}{x_n^2 + 0^4} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Et d'autre part, sur une suite de points (y_n^2, y_n) avec $y_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} f(y_n^2, y_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{y_n^2 y_n^2}{(y_n^2)^2 + y_n^4} = \dfrac{1}{2}$. Donc la limite n'existe pas.

(d) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right| \cdot |y| \leq \left|\frac{x^2}{x^2+0}\right| \cdot |y| \leq |y| \longrightarrow 0$$

lorsque $(x, y) \to (0, 0)$. (Noter que la borne sur $= \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right|$ est vraie même si $x = 0$, donc dans tous les cas on a $|f(x, y)| \leq |y|$. Ainsi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

(e) Le plus simple est d'utiliser un développement limité $\log(1 + t) = t + t\varepsilon(t)$. Ainsi, pour (x, y) assez proche de $(0, 0)$, on a

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2+y^2+y^2\varepsilon(y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2+y^2|\varepsilon(y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

où l'on a utilisé le fait que $\varepsilon(y^2) \to 0$ lorsque $y \to 0$, et est donc ≤ 1 en valeur absolue pour y assez proche de 0. Un passage en coordonnées polaires $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ donne alors

$$|f(x,y)| =\leq \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2(\cos^2(\varphi)+2\sin^2(\varphi))}{r} \leq r\cdot 3 \longrightarrow 0$$

lorsque $r \to 0$. Ainsi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

(f) A nouveau, un développement limité nous vient en aide: $e^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$. On a alors, pour (x, y) assez proche de $(0, 0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|1-1-x^3-x^3\varepsilon(x^3)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3|+|x^3|\cdot|\varepsilon(x^3)|}{x^2+y^2} \leq \frac{2|x^3|}{x^2+y^2}$$

où l'on a utilisé le fait que $\varepsilon(x^3) \to 0$ lorsque $x \to 0$, et est donc ≤ 1 en valeur absolue pour x assez proche de 0. Ainsi

$$|f(x,y)| \leq \underbrace{\frac{2x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 2} \cdot |x| \leq 2|x| \longrightarrow 0$$

lorsque $(x,y) \to (0,0)$, d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(g) Cette limite n'existe pas: si $y = 0$, $f(x,y) = 0 \to 0$, et si $x = 0$ et $y > 0$, on a

$$f(x,y) = \frac{y}{y+y^2} = \frac{1}{1+y} \longrightarrow 1$$

lorsque $y \to 0^+$. (Formellement, on prend les suites $(\frac{1}{n}, 0)$ et $(0, \frac{1}{n})$, et on constatte que les limites sont différentes).

(h) On a

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2 - xy^3}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^7}{(x^2+y^2)^2}$$

La seconde partie tend vers 0: en effet

$$\left|\frac{y^7}{(x^2+y^2)^2}\right| = \underbrace{\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2}_{\leq 1} |y|^3 \leq |y|^3 \longrightarrow 0$$

lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Pour la première, un passage en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ donne

$$\begin{aligned}\frac{x^2y^2 - xy^3}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{r^4(\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^3(\varphi))}{r^4} \\ &= \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^3(\varphi).\end{aligned}$$

On voit donc que cette expression ne dépend plus de r, mais bel et bien de φ! Ainsi, en prenant $\varphi = 0$, on a $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \longrightarrow 0$ et en prenant $\varphi = \frac{\pi}{3}$, on a $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} \neq 0 \not\longrightarrow 0$. Il suit que la limite n'existe pas.

(Avec les suites, cela revient à prendre une suite $(\frac{1}{n}\cos(0), \frac{1}{n}\sin(0)) = (\frac{1}{n}, 0)$ pour $\varphi = 0$, et $(\frac{1}{n}\cos(\pi/3), \frac{1}{n}\sin(\pi/3)) = (\frac{1}{2n}, \frac{\sqrt{3}}{2n})$ pour $\varphi = \pi/3$).

Solution 4.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y\,\ln\Big(1 + (x^2+y^2)^2\Big)}{\exp\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,\big(x^2+y^2\big)^{\frac{5}{2}}}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Alors,

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ■ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$

On calcule les limites le long des axes x et y. On a

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0\cdot \ln\left(1+(x^2)^2\right)}{\exp\left(\sqrt{x^2}\right)\left(x^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

et

$$\lim_{y\to 0^+} f(0,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y\,\ln\left(1+(y^2)^2\right)}{\exp\left(\sqrt{y^2}\right)\left(y^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\exp\left(\sqrt{y^2}\right)} \cdot \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y^4)}{y^4}\,.$$

La première limite se calcule directement :

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\exp\left(\sqrt{y^2}\right)} = \frac{1}{\exp(0)} = 1\,.$$

La deuxième limite est de la forme $\frac{0}{0}$ et on peut utiliser Bernoulli-l'Hospital :

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y^4)}{y^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{4y^3}{1+y^4}}{4y^3} = 1\,.$$

Puisque $\lim_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim_{y\to 0^+} f(0,y)$ la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Remarque 1: *Ci dessus on a pris une suite $y \to 0$ avec $y > 0$. Si on prenait $y \to 0$ avec $y < 0$ on aurait obtenu $\lim_{y\to 0^-} f(0,y) = -1$, du au fait que dans ce cas $\frac{y}{(y^2)^{5/2}} = \frac{sign(y)}{|y|^4} = \frac{-1}{y^4}$.* ***Remarque 2:*** *Ceci est une manière de trouver la réponse, mais d'autres méthodes sont aussi possibles. Par exemple, si on prend une suite (x_n, y_n) avec $x_n = 0$ et $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors $f(x_n, y_n)$ s'approche de 1 pour n pair et de -1 pour n impair. Donc la limite n'existe pas.*

Solution 5.

(a) Comme $f(x,y) = c \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}(x^2 - c)$, les lignes de niveau de f sont de la forme $y = \frac{1}{2}(x^2 - c)$. Les lignes pour $c = -2,\ 0,\ 2$ sont tracées à la Fig. 5 (dans cet ordre de haut en bas). De plus on a

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(x_0,y_0) = (2x_0, -2)$$

et ainsi

$$\nabla f(-2,3) = (-4,-2) \qquad \nabla f\left(1,\tfrac{1}{2}\right) = (2,-2) \qquad \nabla f(2,1) = (4,-2)\,.$$

Les gradients en ces points sont orthogonaux aux lignes de niveau correspondantes (voir Fig. 5). Pour information, la Fig. 6 représente le graphe de f avec des lignes de niveau $f(x,y) = \mathit{const}$ ainsi que les éléments de la Fig. 5 en 3D.

(b) Les surfaces de niveau de g sont définies par

$$g^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = c\}$$

pour un $c \in \mathbb{R}$ fixé. Comme le graphe de f est

$$\mathcal{G}(f) := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\big\},$$

on peut définir $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z = x^2 - 2y - z\,.$$

Ainsi $\mathcal{G}(f)$ correspond à $g^{-1}(0)$, i.e. à la surface de niveau avec $g(x, y, z) = 0$. Pour $c \in \mathbb{R}$ général, on a $g(x, y, z) = c \;\Leftrightarrow\; z = f(x, y) - c$ si bien que la surface de niveau est le graphe de la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \tilde{f}(x, y) = f(x, y) - c\,.$ La Fig. 7 montre ces surfaces pour $c = -8,\, 0,\, 8\,.$

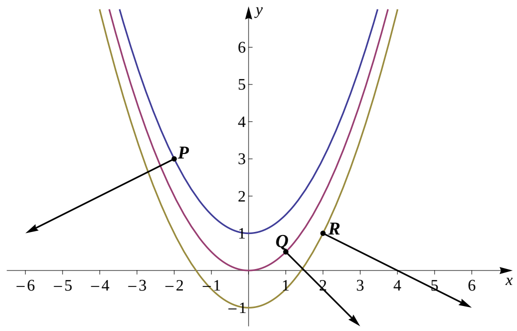


FIGURE 5 –

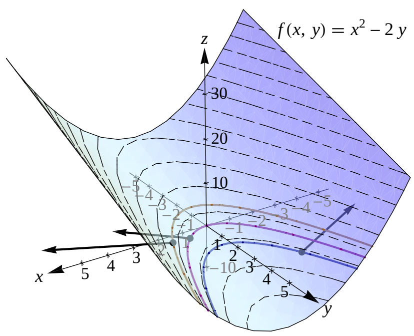


FIGURE 6 –

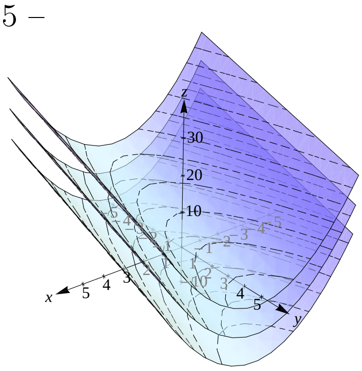


FIGURE 7 –

Solution 6.
Si $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $x^2 + y^2 > 0$, donc $(x^2 + y^2)^\alpha$ est bien défini, et comme f est combinaison de fonctions continues, on conclut que f est continue en tout $(x, y) \neq (0, 0)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudions la continuité en $(0, 0)$. En utilisant une transformation en coordonnées polaires, on trouve

$$f(x, y) = r^{2(1-\alpha)} \cos(\varphi) \sin(\varphi).$$

Ainsi, si $\alpha < 1$, l'exposant du r est positif et on a

$$|f(x,y)| = r^{2(1-\alpha)} \underbrace{|\cos(\varphi)\sin(\varphi)|}_{\leq 1} \leq r^{2(1-\alpha)} \longrightarrow 0$$

lorsque $(x,y) \longrightarrow 0$. Ainsi la fonction est continue dans ce cas.

Si $\alpha = 1$, on a $f(x,y) = \cos(\varphi)\sin(\varphi)$. Comme la limite lorsque $r \to 0$ dépend de φ, la limite de $f(x,y)$ n'existe pas, et donc la fonction n'est pas continue.

Finalement, si $\alpha > 1$, on peut par exemple poser $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et trouver

$$f(x,y) = r^{2(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{2} \to \infty$$

et la limite de $f(x,y)$ n'existe pas non plus dans ce cas.

Pour résumer, la fonction est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha \in \left]-\infty, 1\right[$.

Solution 7.

La fonction $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$ mais on peut vérifier que $\lim\limits_{t \to 0} f(t, \alpha t^2) = 0$.

Solution 8.

La chaine d'implications est:

$$\begin{array}{ccccccc} (f) & \Longrightarrow & (a) & \Longrightarrow & (e) & \Longrightarrow & (d) \\ & \searrow & & & & \searrow & \\ & & (c) & & \Longrightarrow & & (b) \end{array}$$

Pour la chaîne du haut, les limites se traduisent par: il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $((x_k, y_k)) \subseteq \mathbb{R}^2$

(f) telle que ($(x_k, y_k) \neq (0,0)$ et) $(x_k, y_k) \to (0,0)$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \ell = f(0,0)$.

(a) telle que $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ et $(x_k, y_k) \to (0,0)$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \ell$.

(e) de la forme $(x_k, y_k) = (r_k \cos\varphi, r_k \sin\varphi)$ avec $r_k \to 0^+$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \ell$.

(d) de la forme $(x_k, y_k) = (r_k \cos\varphi, r_k \sin\varphi)$ avec $r_k \to 0^+$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k)$ existe.

Il est clair que les conditions deviennent de moins en moins fortes (de plus en plus restrictives), d'où la chaine d'implications. Noter que la condition en gris au (f) est superflue, car comme la limite en question doit de toute façon être égale à $f(0,0)$, les suites ont le "droit" de toucher le point $(0,0)$.

Pour la chaine du bas, remarquons que (c) est équivalent à (c') ci-dessous:

(c) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $((x_k, y_k)) \subseteq \mathbb{R}^2$ telle que $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ et $(x_k, y_k) \to (0,0)$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, 0) = \ell$.

(c') Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$ telle que $x_k \to 0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, 0) = \ell$.

En effet:

<u>(c) $\Rightarrow$ (c'):</u> Pour $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$ telle que $x_k \to 0$, on applique (c) à la suite $(x_k, \frac{1}{k})$; on a alors $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ et $(x_k, y_k) \to (0,0)$, et on conclut que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, 0) = \ell$.

<u>(c) $\Leftarrow$ (c'):</u> Pour $((x_k, y_k)) \subseteq \mathbb{R}^2$ telle que $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ et $(x_k, y_k) \to (0,0)$, on applique (c') à la suite $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$; on a alors $x_k \to 0$ et on conclut que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, 0) = \ell$.

Les limites du bas se traduisent donc par: il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $((x_k, y_k)) \subseteq \mathbb{R}^2$ convergeant vers $(0,0)$

(f) on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \ell = f(0,0)$.

(c') et de la forme $(x_k, y_k) = (x_k, 0)$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \ell$.

(b) et de la forme $(x_k, y_k) = (x_k, 0)$ avec $x_k \neq 0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \ell$.

A nouveau, les conditions deviennent de plus en plus restrictives, d'où la chaine d'implications.

Finalement, pour (e) $\Rightarrow$ (b), en prenant $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$ dans (e), on trouve que

$$\lim_{r\downarrow 0} f(r, 0) = \ell = \lim_{r\downarrow 0} f(-r, 0).$$

En renommant la variable à x, on voit que les limites $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x,0)$ et $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x,0)$ existent et sont égales, et ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ existe aussi.

Les contre-exemples sont décrits dans le tableau suivant (voir liste en dessous):

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
(a) $\Rightarrow$			1			1
(b) $\Rightarrow$	2		1	2	2	1
(c) $\Rightarrow$	2			2	2	2
(d) $\Rightarrow$	3	4	1		4	1
(e) $\Rightarrow$	3		1			1
(f) $\Rightarrow$						

1. Il faut prendre une fonction qui vérifie (a), (b), (d), (e), mais pas (c) ou (f). On choisit une fonction qui n'est pas continue en $(0,0)$, et pas constante sur l'axe des x: par exemple $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
2. Ici, il faut trouver une fonction qui vérifie (b) et (c), mais pas (a), (d), (e), ou (f). On prend f constante sur l'axe des x, mais dont la limite n'existe pas sur l'axe des y: par exemple $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ \sin(\frac{1}{y}) & \text{si } y \neq 0. \end{cases}$
3. On prend une fonction vérifiant (e), (d), mais pas (a): par exemple: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x^2 \\ 1 & \text{si } y = x^2. \end{cases}$

4. Finalement, on trouve une fonction vérifiant (d), mais pas (b) ou (e): par exemple $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$