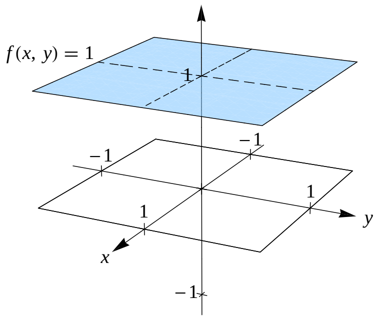
Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

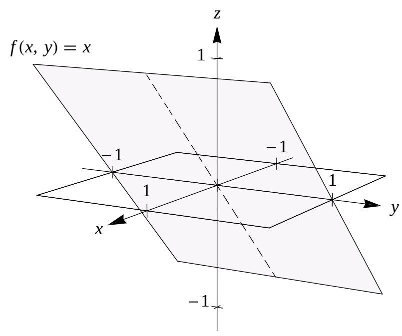
Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.
Les lignes hachurées sont les images des axes x et y par la fonction f.

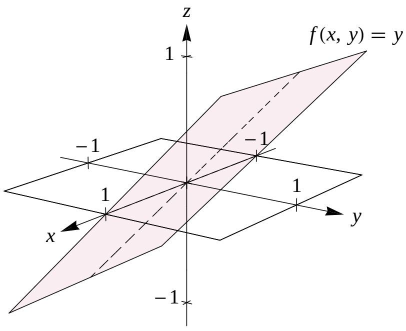
(a) $\mathrm{Im}(f) = \{1\}$



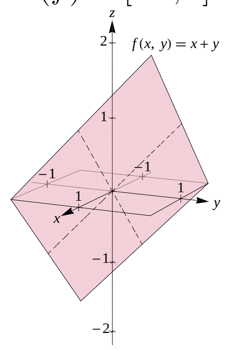
(b) $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$



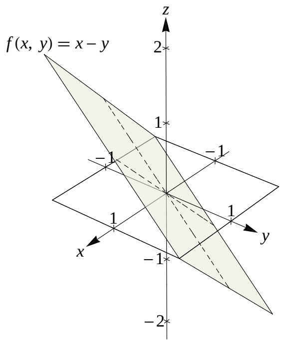
(c) $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$



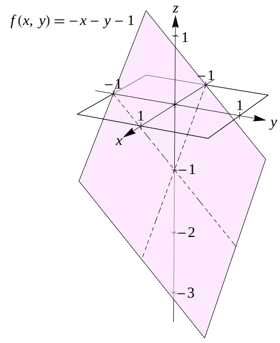
(d) $\mathrm{Im}(f) = [-2, 2]$



(e) $\mathrm{Im}(f) = [-2, 2]$



(f) $\mathrm{Im}(f) = [-3, 1]$



Solution 2.
En mettant au carré, on trouve à gauche (resp. à droite):

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

$$(\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|)^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $-2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \geq -2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ et le résultat en découle.

Une autre méthode est d'utiliser l'inégalité triangulaire $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ avec $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}$. On trouve:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|.$$

En échangeant les variables $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ on obtient $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\|$. Comme $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ et $\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| = -(\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|)$, on a montré que

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq -(\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|) \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big|.$$

Solution 3.

(a) ∂A = rectangle (vide) de sommets $(0,4), (0,5), (2,4), (2,5)$. $\overline{A} = [0,2] \times [4,5]$. $A^\circ =]0,2[\times]4,5[$. A n'est pas ouvert (car $A \neq A^\circ$) et pas fermé (car $A \neq \overline{A}$) A est borné (contenu dans $B((0,0),100)$). A n'est pas compact (il n'est pas fermé).

(b) ∂A = courbe d'équation $y = |x|$ (c'est le graphe de $|x|$). $\overline{A} = A$ = points en dessous de $y = |x|$ (avec le bord), $A^\circ = \{(x,y) \mid y < |x|\}$ = points en dessous de $y = |x|$ (sans le bord). A n'est pas ouvert (car il contient son bord), mais est fermé (car $A = \overline{A}$). A n'est pas borné, donc pas compact.

(c) Comme $y^2 = x^4 \Leftrightarrow y = \pm x^2$, A est l'union des deux courbes $y = x^2$ (graphe de x^2) et $y = -x^2$ (graphe de $-x^2$). Comme A ne contient pas de points intérieurs, on a $A^\circ = \emptyset$, et $\partial A = A = \overline{A}$. A n'est pas ouvert (car $A \neq A^\circ = \emptyset$), mais est fermé (car $A = \overline{A}$). A n'est pas borné, donc pas compact.

(d) Remarquons déjà que si $(x,y) \in A$, alors $x \in]-1,1[$: sinon $1 - x^4$ est négatif, donc $\leq y^2$. Dans cette région, on a $y^2 = 1 - x^4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^4}$, Le bord ∂A est donc l'union des deux courbes $y = \sqrt{1-x^4}$ et $y = -\sqrt{1-x^4}$. On a $A^\circ = A$ = espace compris strictement entre ces deux courbes, et $\overline{A} = \{(x,y) \mid y^2 \leq 1 - x^4\}$. A est ouvert (car $A = A^\circ$), mais pas fermé (car $A \neq \overline{A}$). A est borné (inclus dans le carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$, donc dans la boule $B((0,0), 1.42)$, mais pas compact (car pas fermé).

(e) Le seul moyen que ce produit soit nul est que l'un des termes x, y ou $(x+y)$ soit nul. A est donc l'union des trois courbes $x = 0$, $y = 0$ et $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$. On a $\partial A = A = \overline{A}$, et $A^\circ = \emptyset$. A n'est pas ouvert, fermé, pas borné, pas compact.

(f) L'ensemble A est dénombrable - il ne contient donc aucune boule (qui est indénombrable), donc $A^\circ = \emptyset$. Tous les points de A sont dans le bord ∂A (car ni intérieur ni extérieurs) et on serait donc tentés de dire que $\partial A = A$. C'est hélas une erreur: il manque le point $(1,0)$. En effet, ce point n'est pas intérieur (car $A^\circ = \emptyset$), mais pas extérieur non-plus: comme la suite $\boldsymbol{x}_n = (\frac{n-1}{n}, e^{-n})$ d'éléments de A converge vers $(1,0)$, toutes les boules $B((1,0),r)$ intersectent A, pour tout $r > 0$. Ainsi $(1,0)$ n'est pas un point extérieur ; c'est donc un point du bord et on a $\partial A = \overline{A} = A \cup \{(1,0)\}$. Donc A n'est ni ouvert ni fermé, borné (car $A \subseteq B((1,0),2)$), pas compact.

(g) On a $(x,y) \in A \Leftrightarrow 4-(x+y)^2 > 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 < 4 \Leftrightarrow |x+y| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+y < 2 \Leftrightarrow -2-x < y < 2-x$. Ainsi ∂A = union des deux droites parallèles $y=-2-x$ et $y=2-x$, $A^\circ = A$ = espace (strictement) entre les deux droites, et $\bar{A} = \{(x,y) \mid -2-x \leq y \leq 2-x\} = A \cup$ les deux droites. A est ouvert (car $A^\circ = A$), pas fermé, pas borné et pas compact.

(h) La fonction f est linéaire: c'est la multiplication par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; elle envoie donc des segments de droites sur des segments de droites. Ainsi, ∂A = polygone de sommets $f(-1,-1) = (-2,0), f(-1,1) = (0,-2), f(1,-1) = (0,2), f(1,1) = (2,0)$; c'est un carré tourné de 45°. On a $\bar{A} = A$ = carré (avec son bord), et A° = intérieur du carré (sans le bord). Ainsi A est fermé, non ouvert, borné, compact.

Solution 4.

(a) Soit $(\boldsymbol{x}_k)_k$ une suite convergente, disons vers $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. La suite $(d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}))_k \subset \mathbb{R}$ des distances est donc une suite convergente (vers 0). Elle est donc bornée, disons $< M$ en valeur absolue. Ainsi $(\boldsymbol{x}_k)_k \subset B(\boldsymbol{a}, M)$, et la suite $\boldsymbol{x}_k$ est bornée aussi.

(b) Le concept est simple mais la notation compliquée. Soit $((x_k, y_k))_k$ une suite bornée de $\mathbb{R}^2$. Les suites composantes $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ sont donc bornées (dans $\mathbb{R}$). Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$ de $(x_k)_k$. La suite $(y_{n_k})_k$ ne converge pas forcément, mais elle est bornée (car sous-suite de $(y_k)_k$). On peut donc extraire une sous-suite convergente $(y_{m_k})_k$ de $(y_{n_k})_k$. La suite $(x_{m_k})_k$ converge troujours, car elle est sous-suite de $(x_{n_k})_k$ qui converge. Ainsi, la sous-suite $((x_{m_k}, y_{m_k}))_k$ converge.

Solution 5.

Soit $(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k) = (x_{k,1}, \dots x_{k,n}, y_{k,1}, \dots y_{k,n})$ une suite de $\mathbb{R}^{2n}$ qui converge vers $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = (x_1^*, \dots x_n^*, y_1^*, \dots y_n^*)$. Cela veut dire qu'en composantes, on a $x_{k,1} \to x_1^*$, $\dots, x_{k,n} \to x_n^*, y_{k,1} \to y_1^*, \dots, y_{k,n} \to y_n^*$. La fonction distance s'écrivant

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2},$$

on doit montrer que

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{(x_{k,1}-y_{k,1})^2 + \cdots + (x_{k,n}-y_{k,n})^2} = \sqrt{(x_1^*-y_1^*)^2 + \cdots + (x_n^*-y_n^*)^2},$$

ce qui se montre facilement en utlisant la continuité de la fonction racine, et les propriétés algébriques des limites (cf Analyse 1).

Solution 6.
On rappelle qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ converge si et seulement si chacune de ses suites composantes converge dans $\mathbb{R}$.

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2},\ \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3},\ \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{4}\right) = (1,\ 1,\ 1)$

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln(k)}{k+1},\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sin(k)}{k+1},\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(2k-1)^5}{(k+3)^3(2k+1)^2}\right) = (0,\ 0,\ 8)$

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} e^{-k},\ \lim\limits_{k\to\infty} e^{k}\right) = (0,\ \infty)$ donc divergente.

(d) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} \arctan(k),\ \lim\limits_{k\to\infty} e^{1-\frac{1}{k^7}}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2},\ e\right)$

(e) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\sin(k)|^3}{\sqrt[3]{k}},\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{k}\right) = (0,\ 0)$

Solution 7.

- ☐ $f(t) = (2\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$
- ☐ $f(t) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$
- ■ $f(t) = (2t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$
- ☐ $f(t) = (t\cos(\pi t), t\sin(2\pi t), t)$

Solution 8.
Pour la vitesse instantanée on a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ avec $||f'(t)|| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, donc la longueur du chemin vaut

$$\ell = \int_0^{2\pi} ||f'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$