Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = C_1 x + C_2,\ x \in \mathbb{R}$.

(b) $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2,\ x \in \mathbb{R}$.

(c) On fait l'Ansatz $y = e^{\lambda x}$, pour trouver $e^{\lambda x}(\lambda^2 - 1) = 0$. On a donc deux solutions réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. Ainsi la solution générale est $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.

(d) On fait l'Ansatz $y = e^{\lambda x}$, pour trouver $e^{\lambda x}(\lambda^2 + 1) = 0$. On a donc deux solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Ainsi la solution générale est $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Solution 2.

(a) (i) On résout l'équation homogène: $y'' + 4y = 0$. L'Ansatz $y = e^{\lambda x}$ donne $e^{\lambda x}(\lambda^2 + 4) = 0$, on a donc deux solutions complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ et la solution générale de l'équation homogène associée est donc

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

(ii) On cherche une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés. Toutes les dérives de $q(x) = 3e^{2x}$ sont de la forme (constante)e^{2x} ; le candidat est donc de la forme $y_p = Ae^{2x}$, qui n'apparaît pas dans la solution de l'équation homogène, c'est donc le bon. On substitue:

$$y_p'' + 4y_p = 3e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad (4A + 4A)e^{2x} = 3e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{8} \text{ et } y_p(x) = \frac{3}{8}e^{2x}.$$

(iii) La solution générale est donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \tfrac{3}{8}e^{2x}\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(b) (i) Même chose qu'au point précédent: $y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. (ii) Ici en dérivant $q(x) = 5\cos(2x)$, on trouve des combinaisons linéaires de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$. Le candidat est donc $y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$. Mais le terme $\cos(2x)$ apparaît dans y_h ; il faut donc multiplier *tout* le candidat par x. On trouve $y_p = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$. En reportant cette expression dans l'équation complète, on obtient

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p = 5\cos(2x) \Leftrightarrow\ & 4(B - Ax)\cos(2x) - 4(A + Bx)\sin(2x) + \\ & 4Ax\cos(2x) + 4Bx\sin(2x) = 5\cos(2x) \\ \Leftrightarrow\ & 4B\cos(2x) - 4A\sin(2x) = 5\cos(2x)\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $A = 0$ et $B = \frac{5}{4}$, d'où $y_p(x) = \frac{5}{4}x\sin(2x)$. (iii) La solution générale est donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \tfrac{5}{4}x\sin(2x)\,, \qquad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(c) On fait l'Ansatz $y = e^{\lambda x}$ pour trouver $e^{\lambda x}(4\lambda^2 - 4\lambda + m) = 0$. Le discriminant est $16 - 16m = 16(1-m)$. Ainsi, si $m < 1$, le discriminant est positif, et l'équation a deux solutions réelles $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{1-m}}{8} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-m})$. La solution générale est donc $y(x) = C_1 \exp(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-m})x) + C_2 \exp(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-m})x)$.

Si $m = 1$, le discriminant est nul, et on a donc l'unique solution $\lambda = \frac{1}{2}$. La solution générale de l'équation différentielle est donc $y(x) = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2}$.

Et si $m > 1$, le discriminant est négatif, et l'équation a deux solutions complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{m-1})$. La solution générale de l'équation différentielle est donc $y(x) = e^{x/2}(C_1 \cos(x\sqrt{m-1}) + C_2 \sin(x\sqrt{m-1}))$.

(d) (i) On résout l'équation homogène: $y'' + y = 0$. L'Ansatz $y = e^{\lambda x}$ donne $e^{\lambda x}(\lambda^2 + 1) = 0$, on a donc deux solutions complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \pm i$ et la solution générale de l'équation homogène associée est donc

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

(ii) On cherche une solution particulière de l'équation par la méthode de la variation des constantes:

$$y_p = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x)\ .$$

Selon le cours, les dérivées $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$ satisfont le système linéaire

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) = 0 \\ -C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} \end{cases}$$

dont les solutions sont $C_1'(x) = -1$ et $C_2'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. En intégrant ces expressions, on obtient $C_1(x) = -x$ et $C_2(x) = \ln(|\sin(x)|)$ et ainsi $y_p(x) = -x\cos(x) + \sin(x)\ln(|\sin(x)|)$.

(iii) La solution générale est donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - x\cos(x) + \sin(x)\ln(|\sin(x)|)\ ,$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, \pi[$.

Remarque 1: $y(x)$ est solution de l'ED sur tous les intervalles $]k\pi, k\pi + \pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2: $y(x)$ peut être prolongée par continuité sur tout $\mathbb{R}$, mais elle ne sera pas de classe $C^2(\mathbb{R})$.

(e) (i) On résout l'équation homogène: $y^{(4)} - y'' - 12y = 0$. L'Ansatz $y = e^{\lambda x}$ donne l'équation $\lambda^4 - \lambda^2 - 12 = 0$ qui admet les solutions

$$\lambda_{1,2} = \pm 2, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}i\,.$$

Comme toutes ces racines sont des racines simples, la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_h(x) = C_1\cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2\sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}\,.$$

(ii) Par la méthode des coefficients indéterminés, une solution particulière de l'équation complète est de la forme $y_p = Ax + B$, ce qui mène à l'équation $-12(Ax+B) = 12x+5$, d'où $A = -1$ et $B = -\dfrac{5}{12}$.

(iii) La solution générale est ainsi

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} - x - \tfrac{5}{12}\,, \qquad x, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

(f) (i) Pour l'équation homogène associée, l'Ansatz $y = e^{\lambda x}$ donne l'équation $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$ dont les solutions sont

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{avec multiplicité } p_1 = 2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{avec multiplicité } p_2 = 1.$$

La solution générale de l'équation homogène associée est alors

$$y_p(x) = (C_0 + C_1 x)\, e^{3x} + C_2 e^{-x}\,, \text{ avec } C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) On applique la méthode des coefficients indéterminés: Les dérivées du membre de droite sont combinaison linéaire de $e^{-x}, \sin(x)$ et $\cos(x)$. Un candidat pour la solution particulière est donc: $y_p(x) = Ae^{-x} + B\sin(x) + C\cos(x)$. Le terme e^{-x} apparaît dans la solution de l'équation homogène, il faut donc le multiplier par x. Ainsi une solution particulière y_p est de la forme

$$y_p = Axe^{-x} + B\sin(x) + C\cos(x).$$

On calcule ses dérivées

$$\begin{aligned} {y_p}' &= Ae^{-x} - Axe^{-x} + B\cos(x) - C\sin(x) \\ {y_p}'' &= -2Ae^{-x} + Axe^{-x} - B\sin(x) - C\cos(x) \\ {y_p}''' &= 3Ae^{-x} - Axe^{-x} - B\cos(x) + C\sin(x), \end{aligned}$$

et on substitue dans l'équation différentielle pour trouver

$$16Ae^{-x} + 2B\cos(x) + 14C\cos(x) + 14B\sin(x) - 2C\sin(x) = e^{-x} + \sin(x)\,,$$

d'où

$$16A = 1\,, \qquad 2B + 14C = 0 \qquad \text{et} \qquad 14B - 2C = 1\,.$$

Les solutions sont $A = \frac{1}{16}$, $B = \frac{7}{100}$ et $C = -\frac{1}{100}$, et ainsi on trouve

$$y_p(x) = \frac{1}{16}xe^{-x} + \frac{7}{100}\sin(x) - \frac{1}{100}\cos(x).$$

(iii) La solution générale est donc:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = \\ &= C_0 e^{3x} + C_1 x e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{16}xe^{-x} + \frac{7}{100}\sin(x) - \frac{1}{100}\cos(x)\,, \end{aligned}$$

où $x, C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Solution 3.

(a) (i) La solution générale de l'équation homogène s'obtient en séparant les variables (cf. cours). On obtient

$$y_h(x) = Ce^{3x}, \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

(ii) Comme la fonction $p(x) = -3$ est constante, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour chercher une solution particulière. Ici $q(x) = 10\cos(x) + 2e^{3x}$ et $q'(x) = -10\sin(x) + 6e^{3x}$. Les termes à inclure dans y_p sont donc $\cos(x)$ et $\sin(x)$ qui ne sont pas solutions de l'équation homogène, ainsi que xe^{3x} car e^{3x} *est* solution de l'équation homogène. Donc on pose

$$y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Dxe^{3x}.$$

En reportant cette expression et sa dérivée dans l'équation complète, on obtient

$$\begin{aligned} &\big[A\cos(x) + B\sin(x) + Dxe^{3x}\big]' \\ &\qquad - 3\big(A\cos(x) + B\sin(x) + Dxe^{3x}\big) = 10\cos(x) + 2e^{3x} \\ \Leftrightarrow \quad &(B - 3A)\cos(x) - (A + 3B)\sin(x) + De^{3x} = 10\cos(x) + 2e^{3x}\ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$B - 3A = 10, \qquad A + 3B = 0 \qquad \text{et} \qquad D = 2.$$

On a donc finalement $A = -3$, $B = 1$, $D = 2$ et ainsi

$$y_p(x) = -3\cos(x) + \sin(x) + 2x\,e^{3x}\,.$$

(iii) Par conséquent la solution générale est:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{3x} - 3\cos(x) + \sin(x) + 2x\,e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

De plus on a $C = 3$ pour la condition initiale $y(0) = 0$. Donc la solution est

$$y(x) = 3e^{3x} - 3\cos(x) + \sin(x) + 2x\,e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(b) (i) La solution de l'équation homogène est: $y_h(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(ii) Pour trouver y_p, on utilise encore une fois la méthode des coefficients indéterminés. Les dérivées de $q(x) = x^3$ sont constituées des termes $1, x, x^2$ dont aucun n'est solution de l'équation homogène, de même que $q(x)$ lui-même. Ainsi $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Dx + E$ est un polynôme de degré 3 et on a

$$y_p' + y_p = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + D)x + D + E = x^3,$$

ce qui mène à

$$\begin{aligned} &A = 1, \quad 3A + B = 0, \quad 2B + D = 0 \quad \text{et} \quad D + E = 0 \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad A = 1, \quad B = -3, \quad D = 6 \quad \text{et} \quad E = -6\,. \end{aligned}$$

Ainsi $y_p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$.

(iii) Donc la solution générale est

$$y = y_h + y_p = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour la condition initiale $y(0) = -2$, on obtient $C = 4$ si bien que la solution est

$$y(x) = 4e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(c) (i) L'Ansatz $y = e^{\lambda x}$ donne l'équation $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ qui admet les racines $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \ .$$

(ii) *En utilisant la méthode des coefficients indéterminés*: Le membre de droite est $q(x) = 5\sin(3x)$ qui n'est pas solution de l'équation homogène associée. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x) \ .$$

En substituant y_p dans l'équation différentielle on trouve

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = (-12A - 6B)\sin(3x) + (6A - 12B)\cos(3x) = 5\sin(3x) \ .$$

Les solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} -12A - 6B &= 5 \\ 6A - 12B &= 0 \end{aligned}$$

sont $A = -\frac{1}{3}$ et $B = -\frac{1}{6}$, et la solution particulière de l'équation donnée est donc

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) \ .$$

En utilisant la méthode de variation des constantes: On pose

$$y_p = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-3x}$$

D'après le cours, les fonctions C_1 et C_2 satisfont le système

$$\begin{cases} {C_1}'(x)e^x + {C_2}'(x)e^{-3x} = 0 \\ {C_1}'(x)e^x - 3{C_2}'(x)e^{-3x} = 5\sin(3x) \end{cases}$$

qui a comme solution

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {C_1}'(x) \\ {C_2}'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sin(3x) \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-3x} & e^{-3x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sin(3x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{4} \begin{pmatrix} e^{-x}\sin(3x) \\ -e^{3x}\sin(3x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$C_1(x) = \frac{5}{4}\int e^{-x}\sin(3x)\,dx \qquad \text{et} \qquad C_2(x) = -\frac{5}{4}\int e^{3x}\sin(3x)\,dx\,. \quad (1)$$

On calcule $\displaystyle\int \sin(3x)e^{ax}\,dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}\,e^{ax}\sin(3x) - \frac{1}{a}\int 3\cos(3x)e^{ax}\,dx \\ &= \frac{1}{a}\,e^{ax}\sin(3x) - \frac{3}{a^2}\,e^{ax}\cos(3x) - \frac{3}{a^2}\int 3\sin(3x)e^{ax}\,dx\,,\end{aligned}$$

d'où, en isolant l'intégrale,

$$\left(1+\frac{9}{a^2}\right)\int \sin(3x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}\sin(3x) - \frac{3}{a^2}\,e^{ax}\cos(3x)\,,$$

et finalement

$$\int \sin(3x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+9}\Big(a\sin(3x) - 3\cos(3x)\Big)\,. \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on trouve

$$\begin{aligned}C_1(x) &= -\frac{1}{8}\,e^{-x}\big(\sin(3x) + 3\cos(3x)\big) \qquad (a=-1) \\ C_2(x) &= -\frac{5}{24}\,e^{3x}\big(\sin(3x) - \cos(3x)\big) \qquad (a=3)\end{aligned}$$

et la solution particulière est donc

$$y_{\text{part}}(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,.$$

(iii) La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,, \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pour satisfaire les conditions initiales on doit avoir

$$\begin{aligned}y(0) &= C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 1 \\ y'(0) &= C_1 - 3C_2 - 1 = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont $C_1 = 1$ et $C_2 = \frac{1}{6}$ si bien que

$$y(x) = e^x + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Solution 4.

(a) Les trois sont fausses. On peut considérer l'EDO linéaire homogène du premier ordre $y' + y = 0$. La fonction $y(x) = 0$ est une solution sur $I = \mathbb{R}$, mais $y_1(x) = y(x) + 17 = 17$ n'est pas solution.

(b) C'est faux pour EDO et EDO linéaire: On prend $y'+y = 1$; deux solutions sont données par $y_1(x) = 1$ et $y_2(x) = e^{-x} + 1$, mais $y(x) = y_1(x) - y_2(x) = -e^{-x}$ n'est pas une solution (puisque c'est une solution de $y' + y = 0$). Par contre, c'est vrai pour une EDO linéaire homogène: c'est un résultat du cours (et des exercices: voir Série 1, ex 3).

Solution 5.

(a) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $m\lambda^2+\alpha\lambda+\varepsilon = 0$ qui a comme racines

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m}$$

On doit distinguer trois cas selon le signe du discriminant:

- Si $\alpha^2 - 4m\varepsilon > 0$, c.-à-d. si $\alpha > 2\sqrt{m\varepsilon}$ la solution générale est

$$\begin{aligned} y_h(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= \exp\bigl(-\tfrac{\alpha}{2m}\,t\bigr)\,\Bigl(C_1 \exp\Bigl(\tfrac{\sqrt{\alpha^2-4m\varepsilon}}{2m}\,t\Bigr) + C_2 \exp\Bigl(-\tfrac{\sqrt{\alpha^2-4m\varepsilon}}{2m}\,t\Bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

- Si $\alpha^2 - 4m\varepsilon < 0$, c.-à-d. si $0 < \alpha < 2\sqrt{m\varepsilon}$ les racines sont complexes

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i\,\frac{\sqrt{4m\varepsilon - \alpha^2}}{2m} = x \pm i\,y$$

  et donc la solution générale est

$$\begin{aligned} y_h(t) &= C_1\, e^{xt}\, \cos(yt) + C_2\, e^{xt}\, \sin(yt) \\ &= \exp\bigl(-\tfrac{\alpha}{2m}\,t\bigr)\,\Bigl(C_1 \cos\Bigl(\tfrac{\sqrt{4m\varepsilon-\alpha^2}}{2m}\,t\Bigr) + C_2 \sin\Bigl(\tfrac{\sqrt{4m\varepsilon-\alpha^2}}{2m}\,t\Bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

- Si $\alpha = 2\sqrt{m\varepsilon}$, on a une racine double $\lambda = -\frac{\alpha}{2m} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$. La solution générale de l'équation homogène est alors

$$y_h(t) = C_1 e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\,t} + C_2\, t\, e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\,t} = (C_1 + C_2\, t)\, e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\,t}$$

(b) Lorsque $t \to \infty$ on a $y_h(t) \longrightarrow 0$ pour les trois cas. En effet,

- Dans le premier cas on a $\frac{\alpha}{2m} > \frac{\sqrt{\alpha^2-4m\varepsilon}}{2m} > 0$, si bien que le premier facteur de y_h domine le terme croissant qui multiplie C_1.
- Dans le second cas, c'est évident car les fonctions cos et sin sont bornées.

- Dans le troisième, comme la fonction exponentielle croît plus vite que les polynômes, on a $t\,e^{-\lambda t} \longrightarrow 0$ pour tout $\lambda > 0$.

(c) On met y_p dans l'équation non-homogène. Comme

$$\begin{aligned} {y_p}'(t) &= A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \\ {y_p}''(t) &= -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} &\Big[-mA\omega^2 - \alpha B\omega + \varepsilon A\Big]\sin(\omega t) \\ &\qquad + \Big[-mB\omega^2 + \alpha A\omega + \varepsilon B\Big]\cos(\omega t) = H\sin(\omega t) \\ &\qquad\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon - m\omega^2 & -\alpha\omega \\ \alpha\omega & \varepsilon - m\omega^2 \end{pmatrix}}_{=:J}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J)}\begin{pmatrix} \varepsilon - m\omega^2 & \alpha\omega \\ -\alpha\omega & \varepsilon - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J)}\begin{pmatrix} H(\varepsilon - m\omega^2) \\ -H\alpha\omega \end{pmatrix}$$

et donc (on ne s'amuse pas à calculer $\det(J)$...)

$$y_p(t) = \frac{H}{\det(J)}\Big((\varepsilon - m\omega^2)\sin(\omega t) - \alpha\omega\cos(\omega t)\Big)$$

(d) Comme la solution générale est $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ et qu'on a $y_h(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, le mouvement de la masse s'approche de la solution particulière si le système est maintenu assez longtemps.

Exercice 6.

- □ $y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$
- □ $y(x) = (-37x + 7)e^{5x}$
- ■ $y(x) = e^{4x}\,(7\cos(5x) - 6\sin(5x))$
- □ $y(x) = e^{5x}\Big(7\cos(4x) - \dfrac{37}{4}\sin(4x)\Big)$

Solution 7.

(a) On suppose $x > 0$ et $y(x) > 0$ (c'est vrai dans un voisinage de $x = 1$). L'équation se réécrit

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{x}{y},$$

le second membre étant $-xy^\alpha$ avec $\alpha = -1$. Multiplions à gauche et à droite par $y^{-\alpha} = y$ et posons $z = y^{1-\alpha} = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$:

$$yy' - \frac{y^2}{x} = -x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}z' - \frac{z}{x} = -x \quad \Leftrightarrow \quad z' - \frac{2}{x}z = -2x.$$

C'est une équation linéaire du premier ordre pour la fonction z. (i) L'équation homogène se résout par séparation des variables:

$$\begin{aligned}
z' = \frac{2}{x}z \Leftrightarrow \int \frac{1}{z}\,dz = 2\int \frac{1}{x}\,dx \\
\Leftrightarrow \log|z| = 2\log|x| + C = \log(Cx^2) \Leftrightarrow z_h = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(ii) On utilise la variation de la constante: $z_p = C(x)x^2$. En substituant dans l'équation, on trouve:

$$C'(x)x^2 + C(x)\underbrace{(...)}_{=0} = -2x \Leftrightarrow C'(x) = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow C(x) = -2\log|x|.$$

Ainsi $z_p = -2x^2\log(x)$ (car $x > 0$).

(iii) On trouve donc la solution générale $z = x^2(C - 2\log(x))$. Comme $y > 0$ et $z^2 = y$, on trouve la solution générale

$$y(x) = x\sqrt{C - 2\log(x)} \quad 0 < x < e^{C/2}.$$

(Les conditions sur x proviennent du domaine de la fonction). Avec la condition initiale $y(1) = 1$, on trouve $1 = \sqrt{C} \Leftrightarrow C = 1$. Ainsi, la solution est:

$$\begin{aligned}
y\colon\ ]0, \sqrt{e}[&\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto x\sqrt{1 - 2\log(x)}.
\end{aligned}$$

(b) La supposition est la même que pour (a), c'est à dire: $x > 0$ et $y(x) > 0$. L'équation se réécrit

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = h(\frac{y}{x}), \quad \text{avec } h(t) = t - \frac{1}{t}.$$

On pose $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y = zx$, d'où $y' = z'x + z$. L'équation devient donc

$$z'x + z = h(z) = z - \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z'x = -\frac{1}{z}.$$

On résout en séparant les variables:

$$\frac{dz}{dx}x = -\frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \int z\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}z^2 = -\log|x| + C,$$

d'où $z = \sqrt{C - 2\log(x)}$, comme z et x sont positifs. Ainsi la solution générale est

$$y(x) = xz(x) = x\sqrt{C - 2\log(x)} \quad 0 < x < e^{C/2}.$$

De là, la résolution est la même qu'en (a): la condition initiale $y(1) = 1$, donne $C = 1$, et donc la solution est

$$\begin{aligned}
y\colon\ ]0, \sqrt{e}[&\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto x\sqrt{1 - 2\log(x)}.
\end{aligned}$$

Solution 8.
Dans un voisinage de $t = 0$, y et y' ne sont pas nuls. On peut donc sans peur multiplier par y' puis intégrer:

$$\int y'(t) \cdot y''(t)\, dt = \int (y(t))^3 \cdot y'(t)\, dt \Rightarrow \frac{1}{2}\,(y'(t))^2 = \frac{1}{4}\,(y(t))^4 + C$$

On remplace t par 0 et on utilise les CI pour trouver

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

L'équation se réécrit donc

$$y'(t) = \pm\frac{(y(t))^2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}y^2$$

car $y'(0)$ doit être positif. Cette dernière équation se résout en séparant les variables:

$$\int y^{-2}\, dy = \int \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt \quad \Rightarrow \quad -y^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}t + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{-1}{t/\sqrt{2} + C}$$

En utilisant $y(0) = 1$, on trouve $\frac{-1}{C} = 1 \Rightarrow C = -1$. Ainsi, la solution maximale est

$$\begin{aligned} y\colon \left]-\infty, \sqrt{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t \mapsto y(t) &= \frac{1}{1 - t/\sqrt{2}} \end{aligned}$$