Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) La fonction $y(x) = 2$ est solution de l'équation. Pour $y \neq 2$ on a

$$\frac{dy}{dx} = y - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y-2} = dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y-2|) = x + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad y - 2 = Ce^x, \quad C \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y = Ce^x + 2\,.$$

Avec $C = 0$, on a $y(x) = 2$. Ainsi la solution générale est $y(x) = Ce^x + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Cette EDO est linéaire: c'est $y' - y = -2$. L'équation homogène correspondante est $y' = y$, qui a pour solution générale $y_h(x) = Ce^x, x \in \mathbb{R}$. On devine la soution particulière $y_p(x) = 2$. La solution générale est donc $\{y(x) = Ce^x + 2, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}\}$.

(b) La fonction $y(x) = 1$ est une solution. Pour $y \neq 1$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -x(y-1) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y-1} = -xdx \;\Rightarrow\; \ln(|y-1|) = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 1, \quad C \neq 0\,.$$

Comme le cas $C = 0$ correspond à $y(x) = 1$, la solution générale est $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Cette EDO est linéaire: c'est $y' + xy = x$. L'équation homogène correspondante est $y' + xy = 0$, et on trouve en séparant les variables comme plus haut que sa solution générale est $y_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + x \in \mathbb{R}$. On devine la solution particulière $y_p(x) = 1$. Ainsi, la solution générale est $\{y(x) = y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}\}$.

(c) La fonction $y(x) = 0$ est une solution pour $x \in \,]-\infty, 0[$ et pour $x \in \,]0, +\infty[$. Si $x, y \neq 0$ on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = -3\ln(|x|) + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad |y| = \frac{C}{|x|^3}, \quad C > 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{C}{|x|^3} \quad C > 0$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{C}{|x|^3} \quad C \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x^3} \quad C \neq 0\,.$$

La dernière implication suit du fait que pour $C \in \mathbb{R}$ et $x < 0$ on a $\dfrac{C}{|x|^3} = \dfrac{-C}{x^3}$. Les deux solutions $y(x) = 0$ déjà trouvées peuvent être inclues en choisissant $C = 0$. La solution générale du problème est donc

$$\left\{ \begin{array}{r} y\colon \;]-\infty, 0[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{C}{x^3} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{r} y\colon \;]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{C}{x^3} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'EDO est linéaire homogène, la méthode vue en cours coïncide donc avec la méthode de séparation des variables ci-dessus.

(d) En intégrant $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = dx$ des deux côtés on trouve $\operatorname{arcsinh}(y) = x + C$ pour $C, x \in \mathbb{R}$. Ainsi la solution générale est $y(x) = \sinh(x+C)$ pour $C, x \in \mathbb{R}$.

Cette EDO n'est pas linéaire.

Solution 2.

(a) On procède par séparation des variables. En écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ l'équation devient

$$6(y-1)^2\,dy = x(3x+4)\,dx\,,$$

d'où, par intégration des deux fonctions polynomiales,

$$2(y-1)^3 = x^3 + 2x^2 + \tilde{C}, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

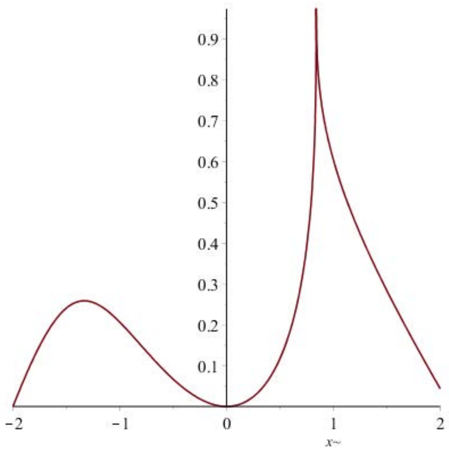
La forme explicite de la solution y est donc

$$y(x) = 1 + f^{-1}\Big(x^2\big(\tfrac{1}{2}x+1\big) + C\Big), \qquad x \in I,\ C \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $f^{-1}(u)$ est la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ et I est un intervalle ouvert à définir. Comme f est bijective sur $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque f^{-1} est aussi définie sur $\mathbb{R}$, à savoir par

$$f^{-1}(u) = \operatorname{sgn}(u)|u|^{1/3}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en $u = 0$, ce qui fait que l'équation différentielle a plusieurs solutions $y(x)$ données par la même expression (1) mais définies sur des intervalles ouverts différents.



En effet comme on peut voir sur le graphe, la fonction $y(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est de classe C^1 que sur des intervalles ouverts à gauche et à droite du point b où le graphe de $y(x)$ a un cusp et où la fonction $y(x)$ n'est pas dérivable. Ces intervalles I dépendent des racines réelles du polynôme $x^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)+C$, chaque solution étant définie sur un intervalle ouvert sur lequel ce polynôme est du même signe.

La condition initiale $y(0)=0$ implique que $0=1+\operatorname{sgn}(C)|C|^{1/3}$, c'est-à-dire $C=-1$. Soit maintenant $b>0$ l'unique solution réelle de l'équation $x^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1=0$. (On peut voir que b est l'unique solution et qu'elle est positive par une étude de la fonction $g(x)=x^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1$.) C'est donc l'intervalle à gauche de b qui contient le point $x_0=0$ où la condition initiale est spécifiée.

On obtient donc la solution maximale pour la condition initiale donnée :

$$y(x)=1-\left|x^2\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)-1\right|^{1/3}=1-\sqrt[3]{1-x^2\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)}\,,\qquad x\in:\,]-\infty,b[:\,,$$

(b) On applique la même méthode:

$$y\,y'-e^{y^2-4x}=0\;\Rightarrow\;y\,e^{-y^2}dy=e^{-4x}dx\;\Rightarrow\;-\frac{1}{2}e^{-y^2}=-\frac{1}{4}e^{-4x}+\tilde{C},\;\tilde{C}\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow\;e^{-y^2}=\frac{1}{2}e^{-4x}+C,\;C\in\mathbb{R}\;\Rightarrow\;y^2=-\ln\left(\left(\frac{1}{2}e^{-4x}+C\right)\right),\;C\in\mathbb{R}$$

En fait, la constante C ne peut pas prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$ parce que $y^2\geq 0$ et le logarithme doit être défini. Mais comme on ne s'intéresse pas à la solution générale ici, il n'est pas nécessaire de trouver le domaine exact de C, il suffira de trouver la valeur de C à partir de la condition initiale et puis le domaine de x en fonction.

La forme explicite de la solution y est alors

$$y(x)=\pm\sqrt{-\ln\left(\tfrac{1}{2}e^{-4x}+C\right)}.$$

La condition initiale $y(0)=\sqrt{\ln(2)}$ implique que le signe est positif, et, de plus,

$$\sqrt{\ln(2)}=+\sqrt{-\ln\left(\tfrac{1}{2}+C\right)}\qquad\Rightarrow\qquad C=0.$$

La solution particulière pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x)=\sqrt{4x+\ln(2)}$$

qui est à priori définie pour $x\geq-\frac{\ln(2)}{4}$. Or, $y'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x+\ln(2)}}$ n'est pas définie en $x=-\frac{\ln(2)}{4}$. La solution maximale pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x)=\sqrt{4x+\ln(2)},\qquad x\in\left]-\frac{\ln(2)}{4},\infty\right[.$$

(c) C'est une équation linéaire, on applique donc la méthode vue en cours. (i) On résout l'équation homogène: $y'-y\sin(x)=0$. En séparant les variables, on obtient

$$y_h(x)=Ce^{-\int(-\sin(x))dx}=Ce^{-\cos(x)}\qquad\text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

(ii) Pour trouver une solution particulière de l'équation complète (i.e. avec second membre), on utilise la méthode de variation de la constante:

$$y_p(x) = C(x)e^{-\cos(x)}.$$

On a alors

$$y_p'(x) = \big[C'(x) + C(x)\sin(x)\big]e^{-\cos(x)}$$

et en substituant, on trouve:

$$\begin{aligned} [C'(x) + C(x)\sin(x)]\,e^{-\cos(x)} - \sin(x)C(x)e^{-\cos(x)} &= 4\sin(x)e^{\cos(x)} \\ \Leftrightarrow \qquad C'(x)e^{-\cos(x)} &= 4\sin(x)e^{\cos(x)}\ . \end{aligned}$$

Par conséquent $C'(x) = 4\sin(x)e^{2\cos(x)}$ et en intégrant on trouve $C(x) = -2e^{2\cos(x)}$. Ainsi $y_p(x) = -2e^{\cos(x)}$. Notons qu'une éventuelle constante d'intégration de cette étape serait combinée avec la constante de la solution de l'équation homogène, donc il n'y a pas besoin d'ajouter une constante ici.

(iii) La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y = y_h + y_p = Ce^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1$ implique que $C-2 = 1$, d'où $C = 3$. La solution pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = 3e^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(d) C'est également une équation linéaire. A cause du logarithme dans l'équation, on a $x > 0$, et donc l'équation donnée est équivalente à

$$y' - \frac{1}{x}\,y = 4\ln(x)\,.$$

(i) On résout l'équation homogène associée par séparation des variables. On trouve:

$$y_h(x) = Ce^{-\int -\frac{1}{x}\,dx} = Ce^{\ln(x)} = C\,x\,, \qquad x > 0,\ C \in \mathbb{R}.$$

(ii) Par la méthode de variation de la constante, on pose $y_p(x) = C(x)\,x$ et en substituant dans l'équation initiale on trouve que $C'(x) = \frac{4\ln(x)}{x}$. En intégrant on trouve

$$C(x) = 4\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = 4\int \big[\ln(x)\big]'\ln(x)\,dx = 2\ln(x)^2\ .$$

Il n'y a de nouveau pas de constante d'intégration à cette étape. Par conséquent

$$y_p(x) = 2x\ln(x)^2.$$

(iii) La solution générale est donc:

$$y = y_h + y_p = \big(C + 2\ln(x)^2\big)\,x\,, \qquad x \in]0,\infty[.$$

La solution pour la condition initiale $y(1) = 1$ est:

$$y(x) = \big(1 + 2\ln(x)^2\big)\,x\,, \qquad x \in\ ]0,\infty[\,.$$

Solution 3.

(a) Pour $\varepsilon = 0$, la solution maximale est $y_0(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ on utilise la séparation des variables

$$\frac{dy}{dx} = y^{1+\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y^{1+\varepsilon}} = dx \ ,$$

ce qui donne, après intégration, la solution générale

$$-\frac{1}{\varepsilon\, y^{\varepsilon}} = x + C \ , \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale implique que

$$-\frac{1}{\varepsilon} = C \ .$$

Ainsi

$$y^{-\varepsilon} = -\varepsilon\left(x - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

et la solution recherchée est donc

$$y_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \ , \qquad x \in \left]-\infty, \frac{1}{\varepsilon}\right[\ .$$

(L'intervalle de définition pour x s'obtient à partir du fait que $1 - \varepsilon x$ doit être positif.)

(b) Notons que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $x \in \mathbb{R}$ est contenu dans le domaine de définition de y_ε. Ainsi, la limite à calculer fait du sens. On a

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} (1-\varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\ln(1-\varepsilon x)\right] .\end{aligned}$$

Comme la fonction exponentielle est continue, on peut échanger l'évaluation de la fonction et la limite et l'on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x) = \exp\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\ln(1-\varepsilon x)}{\varepsilon}\right)\right] .$$

Puisque $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(1-\varepsilon x) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0$, on peut appliquer Bernoulli-l'Hospital pour calculer la limite, ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x) = \exp\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\frac{-x}{1-\varepsilon x}}{1}\right)\right] = \exp\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x}{1-\varepsilon x}\right] = \exp\left(x\right) = y_0(x) \ .$$

Solution 4.
On récrit l'équation

$$\frac{dy}{dt} = y(a-by) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y(a-by)} = dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y(a-by)} = \int dt$$

On décompose le terme de gauche en éléments simples :

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{a-by} = \frac{A(a-by)+By}{y(a-by)} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = A(a-by)+By = Aa-(Ab-B)y\,,$$

donc $A = \frac{1}{a}$ et $B = \frac{b}{a}$. Ainsi

$$\int \frac{1}{y(a-by)}\,dy = \int \frac{1}{ay}\,dy + \int \frac{b}{a(a-by)}\,dy = \frac{1}{a}\ln(|y|) - \frac{1}{a}\ln(|a-by|)\,,$$

et donc on a pour $C > 0$

$$\frac{1}{a}\ln(|y|) - \frac{1}{a}\ln(|a-by|) = t + \ln(C) \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{y}{a-by}\right|^{1/a} = Ce^t \;\Leftrightarrow\; \frac{y}{a-by} = \pm C^a e^{at}$$

On pose alors $C^* := \pm C^a \in \mathbb{R}^*$ et on continue

$$\frac{y}{a-by} = C^* e^{at} \quad \Leftrightarrow \quad y = C^* e^{at}(a-by) \quad \Leftrightarrow \quad y(1+bC^* e^{at}) = aC^* e^{at}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{aC^* e^{at}}{1+bC^* e^{at}} = \frac{aC^*}{e^{-at}+bC^*} = \frac{a}{\frac{e^{-at}}{C^*}+b} = \frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{e^{-at}}{bC^*}}$$

On détermine la valeur de C^* pour condition initiale $y(0) = y_0$:

$$y(0) = \frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{1}{bC^*}} = \frac{aC^*}{bC^*+1} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad aC^* = y_0(bC^*+1) \quad \Leftrightarrow \quad C^* = \frac{y_0}{a-by_0}$$

La solution cherchée est donc

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{e^{-at}(a-by_0)}{by_0}} = \frac{\frac{a}{b}}{1+\left(\frac{a}{by_0}-1\right)e^{-at}}.$$

Noter que pour les conditions initiales $y_0 = 0$ ou $y_0 = \frac{a}{b}$, les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions constantes, à savoir $y(t) = 0$ et $y(t) = \frac{a}{b}$ respectivement.

La croissance de la solution $y(t)$ est déterminée par le facteur $\lambda := \frac{a}{by_0} - 1$ devant l'exponentielle. Si $y_0 > \frac{a}{b}$, alors $\lambda < 0$ et donc $y(t)$ est décroissante. Si $y_0 < \frac{a}{b}$ on a $\lambda > 0$ et $y(t)$ est croissante. Puisque $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{a}{b}$, la droite $y = \frac{a}{b}$ est une asymptote horizontale et n'est donc jamais intersectée par $y(t)$.

Solution 5.

Remarque : *rappelons que la méthode de la séparation des variables ne permet en général pas de trouver toutes les solutions d'une équation différentielle, car en séparant les variables on est souvent amené à diviser par des expression qui peuvent s'annuler. Ces valeurs éventuelles sont à inspecter séparément. Dans le présent exemple ce sont les valeurs $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 1$ qui sont de ce type. Par conséquence, les deux solutions $y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ et $y(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$ ne peuvent pas être trouvées par la méthode de la séparation des variables, mais on vérifie facilement que ce sont bien des solutions. Les points $x = 0$ et $x = 1$ sont à contrôler pour chacune des solutions, car il pourrait s'agir de point où, comme dans l'exercice 2(a) la fonction qui définit la solution n'est pas dérivable. La situation est différente dans le présent exemple. Ici toutes les solutions sont régulières aussi bien en $x = 0$ qu'en $x = 1$, mais ce sont néanmoins des points particuliers, car il s'agit de points de non unicité de l'équation différentielle. En effet, comme on peut voir dans le graphique en bas, il existe une infinité de solutions de l'équation différentielles qui satisfont $y(0) = 0$ ou $y(1) = 1$ et ces points sont de ce fait difficile à traiter d'un point de vu théorique. Hélas, en pratique ce souvent des points de ce type qui sont intéressants, raison pour laquelle nous présentons ces exemples ici.*

Observons d'abord que les fonctions constantes $y(x) = 0$ et $y(x) = 1$ sont des solutions pour $x \in \mathbb{R}$.

Si $x, y \neq 0$ et $x, y \neq 1$, l'équation différentielle donnée s'écrit

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x(x-1)} \ ,$$

puis, en décomposant chaque terme en éléments simples:

$$\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx \ .$$

En intégrant les deux côtés on obtient

$$\begin{aligned}
-\ln|y| + \ln|y-1| &= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C} > 0, \\
\Leftrightarrow \qquad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln(\tilde{C}) \quad \tilde{C} > 0, \\
\Leftrightarrow \qquad \left|\frac{y-1}{y}\right| &= \tilde{C}\left|\frac{x-1}{x}\right| \quad \tilde{C} > 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

L'équation (2) est équivalente à

$$\frac{y-1}{y} = C\,\frac{x-1}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ , \tag{3}$$

car, si un couple (x, y) satisfait l'équation (2) pour un certain $\tilde{C}$, il satisfait aussi l'équation (3) avec $C = \tilde{C}$ ou $C = -\tilde{C}$, et si un couple (x, y) satisfait l'équation (3) pour un certain C, il satisfait aussi l'équation (2) pour $\tilde{C} = |C|$.

A partir de (3) on trouve l'expression explicite de y en fonction de x,

$$Cy(x-1) = x(y-1) \ \Rightarrow\ y(Cx - C - x) = -x \ \Rightarrow\ y(x) = \frac{x}{(1-C)x + C} \ .$$

Pour $C \neq 0$ et $C \neq 1$ la fonction $y(x)$ définit deux solutions, une sur l'intervalle $\left]-\infty, \frac{C}{C-1}\right[$ et une sur l'intervalle $\left]\frac{C}{C-1}, \infty\right[$. (Le dénominateur de y s'annule en $x = \frac{C}{C-1}$ dans ce cas.)

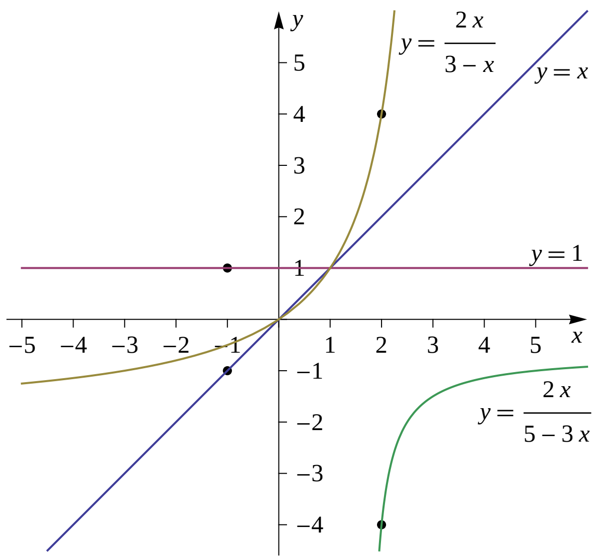
Pour $C = 0$, on a $y(x) = 1$ et pour $C = 1$, on a $y(x) = x$. Tout comme la solution triviale $y(x) = 0$, ces deux solutions sont définies pour $x \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation donnée est donc

$$\begin{array}{lll} y(x) = \dfrac{x}{(1-C)x + C}\,, & C \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,, & x \in \left]-\infty, \frac{C}{C-1}\right[\text{ ou } x \in \left]\frac{C}{C-1}, \infty\right[, \\ y(x) = 1\,, & C = 0\,, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = x\,, & C = 1\,, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = 0\,, & \text{-} & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Pour trouver les solutions particulières pour les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ données, on met la condition initiale dans la solution générale et on résout pour C. Les solutions sont:

$$\begin{array}{lllll} x_0 = -1,\ y_0 = -1 & \Rightarrow & C = 1 & \Rightarrow & y = x, & x \in \mathbb{R} \\ x_0 = -1,\ y_0 = 1 & \Rightarrow & C = 0 & \Rightarrow & y = 1, & x \in \mathbb{R} \\ x_0 = 2,\ y_0 = 4 & \Rightarrow & C = \frac{3}{2} & \Rightarrow & y = \frac{2x}{3-x}, & x \in]-\infty, 3[^* \\ x_0 = 2,\ y_0 = -4 & \Rightarrow & C = \frac{5}{2} & \Rightarrow & y = \frac{2x}{5-3x}, & x \in]\frac{5}{3}, \infty[^* \end{array}$$

*On a choisi l'intervalle qui contient x_0.



Graphe des solutions (les points correspondent aux conditions initiales).

Solution 6.
On commence par chercher la solution générale. Soit $y(t)$ une telle solution. On remarque déjà que $y(t) \geq 0$ (car sinon la racine n'est pas définie), et $y(t)$ est croissante (car l'EDO implique que $y'(t) > 0$). On voit alors que la fonction identiquement nulle $y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ est une solution.

Supposons que y n'est pas identiquement nulle – il existe alors $t_0 \in \mathbb{R}$ avec $y(t_0) = y_0 > 0$. Comme y est continue, il existe un voisinage (= intervalle ouvert) J contenant t_0 tel que $y(t) > 0$ pour tout $t \in J$. Dans un tel intervalle, on a

$$y'(t) = y(t)^{1/2} \Rightarrow y(t)^{-1/2} y'(t) = 1.$$

On intègre entre t_0 et $t \in J$ pour trouver

$$\int_{t_0}^{t} y(\tau)^{-1/2} y'(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} d\tau \Rightarrow \left[2y(\tau)^{1/2}\right]_{t_0}^{t} = \left[\tau\right]_{t_0}^{t} \Rightarrow 2y(t)^{1/2} - 2y_0^{1/2} = t - t_0.$$

Ainsi $y(t) = \frac{(t-t_0+2\sqrt{y_0})^2}{4}$. Cet argument est valable sur tout intervalle contenant t_0 et tel que $y(t) > 0$, donc sur l'intervalle $\left]t_0 - 2\sqrt{y_0}, +\infty\right[$.

Arrivé là, on se demande si on peut prolonger cette solution pour $t \leq t_0 - 2\sqrt{y_0}$ (si on ne peut pas, cette solution est maximale et on a terminé). Supposons qu'il existe un tel prolongement $y(t)$. Comme $y(t_0 - 2\sqrt{y_0}) = 0$ et $y(t)$ est forcément positive et croissante, le seul cas de figure restant est $y(t) = 0$ pour $t \leq t_0 - 2\sqrt{y_0}$. Avec un tel prolongement, on remarque que la fonction y est bien C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier – on a donc trouvé la solution maximale

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0+2\sqrt{y_0})^2}{4} & t \geq t_0 - 2\sqrt{y_0} \\ 0 & t \leq t_0 - 2\sqrt{y_0}. \end{cases} \end{aligned}$$

En renommant les paramètres, on trouve donc la solution générale

$$\{y(t) = 0, t \in \mathbb{R}\} \cup \left\{ y(t) = \begin{cases} \frac{(t-C)^2}{4} & t \geq C \\ 0 & t \leq C, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Parmis toutes ces solutions, la seule vérifiant $y(0) = 1$ est de la seconde forme, avec nécessairement $C < 0$. En remplaçant, on trouve $\frac{(0-C)^2}{4} = 1 \Rightarrow C = -2$. Ainsi, la solution maximale est

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t) = \begin{cases} \frac{(t+2)^2}{4} & t \geq -2 \\ 0 & t \leq -2. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Ici, la solution est soit de la prmière forme, soit de la seconde forme pour n'importe quel $C \geq 0$ (car si $C < 0$, on a $y(0) > 0$). Ainsi on a les solutions maximales suivantes:

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \frac{(t-C)^2}{4} & \text{si } t \geq C \\ 0 & \text{si } t \leq C \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{pour tout } C \geq 0.$$

Solution 7.

■ $u(\pi) = \dfrac{1}{6}$ □ $u(\pi) = \dfrac{1}{2}$ □ $u(\pi) = \dfrac{1}{4\,e^2}$ □ $u(\pi) = \dfrac{e^2}{4}$

Solution 8.

□ $y(2) = \ln{(2)}$ □ $y(2) = 2\,\ln{(2)} + 2$

■ $y(2) = 2\,\ln(2)$ □ $y(2) = -2\,\ln{(2)}$

Solution 9.

□ $y(x) = \arccos\left(e^{-\frac{2}{2x^4+3x^2+C}}\right)$ □ $y(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{2x^4+3x^2+C}\right)$

□ $y(x) = \arccos\left(\dfrac{-1}{2x^4+3x^2+C}\right)$ ■ $y(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{2x^4+3x^2+C}\right)$