Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) $y' = \log(5) \cdot y$.

(b) $y'' = -y$, ou du premier ordre: $(y')^2 + y^2 = 1$.

(c) $y'' = -(y')^2$, ou du premier ordre: $y' = e^{-y}$.

(d) $y'' - 2y' + 2y = 0$, ou du premier ordre: ?

Solution 2.
On a $(y_2(t)e^{-t})' = y_2'(t)e^{-t} - y_2(t)e^{-t} = y_2(t)e^{-t} - y_2(t)e^{-t} = 0$ car $y_2'(t) = y_2(t)$. Donc la fonction $y_2(t)e^{-t}$ est constante (dérivée nulle), d'où $y_2(t)e^{-t} = C \Leftrightarrow y_2(t) = Ce^t$. Comme $y_2(0) = 1$, on trouve $Ce^0 = C = 1$, et donc $y_2(t) = e^t$ qui est donc bien la seule solution.

Solution 3.
On pose $h(t) = y_2(t) - y_1(t)$. En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$
\begin{aligned}
&a_n h^{(n)} + a_{n-1} h^{(n-1)} + \cdots + a_1 h' + a_0 h = \\
&(a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_2' + a_0 y_2) - (a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1) = \\
&b - b = 0.
\end{aligned}
$$

Solution 4.

(a) La dérivée de y est

$$y'(x) = \tan(x) + \frac{x}{\cos(x)^2} + C\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,.$$

En utilisant la définition de $\tan(x)$, on trouve que

$$
\begin{aligned}
y'(x) - \tan(x)\,y(x) &= \tan(x) + \frac{x}{\cos(x)^2} + C\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} \\
&\quad - \tan(x)\left(1 + x\tan(x) + \frac{C}{\cos(x)}\right) \\
&= x\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - \tan(x)^2\right) = x\,\frac{1 - \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = x\,.
\end{aligned}
$$

Les fonctions $y(x)$ satisfont donc l'équation différentielle donnée.

Remarque: On peut aussi utiliser directement que $\big(\tan(x)\big)' = 1 + \tan(x)^2$.

(b) On procède de la même manière qu'au point précédent. On a

$$y'(x) = 2\cos(x) - \sin(2x) - C\cos(x)\,e^{-\sin(x)}\,,$$

et donc, avec un peu de trigonométrie,

$$\begin{aligned} y'(x) + \cos(x)\,y(x) &= 2\cos(x) - \sin(2x) - C\cos(x)e^{-\sin(x)} \\ &\quad + \cos(x)\left(2\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{2} + Ce^{-\sin(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2}\cos(x)\underbrace{\big(1+\cos(2x)\big)}_{=2\cos(x)^2} = \cos(x)^3\,. \end{aligned}$$

Les fonctions $y(x)$ satisfont donc l'équation différentielle donnée.

Solution 5.

y_4 n'est solution d'aucune équation, car elle n'est pas définie sur un intervalle. Toutes les fonctions (sauf y_4) sont solutions de E_1, et y_1 est maximale. Pour E_2, les solutions sont y_2, y_3, y_5, y_6, et les maximales sont y_2, y_3, y_6. Pour E_3 c'est comme E_2 mais sans y_6. Les solutions générales sont les ensembles de toutes les solutions maximales:

$$E_1 : \left\{ \begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto C(t-1) \end{aligned} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 : \left\{ \begin{aligned} y\colon\ ]-\infty,1[\ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto C(t-1) \end{aligned} \mid C \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{aligned} y\colon\ ]1,\infty[\ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto C(t-1) \end{aligned} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_3 : \left\{ \begin{aligned} y\colon\ ]-\infty,1[\ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto C(t-1) \end{aligned} \mid C \in \mathbb{R}^* \right\} \cup \left\{ \begin{aligned} y\colon\ ]1,\infty[\ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto C(t-1) \end{aligned} \mid C \in \mathbb{R}^* \right\}$$

Solution 6.

(a) On a

$$y'(x) = 1 - \frac{2(1+xe^{-x}) - 2x(e^{-x} - xe^{-x})}{(1+xe^{-x})^2} = \underbrace{1 - \frac{2}{1+xe^{-x}}}_{=\frac{y(x)}{x}} + \frac{2xe^{-x}(1-x)}{(1+xe^{-x})^2}\,,$$

et

$$\begin{aligned} y(x)^2 - x^2 &= \left(x - \frac{2x}{1+xe^{-x}}\right)^2 - x^2 = -\frac{4x^2}{1+xe^{-x}} + \frac{4x^2}{(1+xe^{-x})^2} \\ &= \frac{-4x^2(1+xe^{-x}) + 4x^2}{(1+xe^{-x})^2} = \frac{-4x^3e^{-x}}{(1+xe^{-x})^2}\,. \end{aligned}$$

Ainsi

$$2x^2\, y'(x) = 2x\, y(x) - \frac{4x^3 e^{-x}(x-1)}{(1+xe^{-x})^2}\ ,$$

et donc

$$\begin{aligned} 2x^2\, y'(x) - (x-1)(y(x)^2 - x^2) - 2x\, y(x) = \\ = -\frac{4x^3 e^{-x}(x-1)}{(1+xe^{-x})^2} - (x-1)\frac{-4x^3 e^{-x}}{(1+xe^{-x})^2} = 0\,. \end{aligned}$$

La fonction $y(x)$ satisfait donc l'équation différentielle. On a en plus

$$y(1) = 1 - \frac{2}{1+e^{-1}} = 1 - \frac{2e}{e+1} = \frac{1-e}{1+e}\,,$$

et $y(x)$ est donc solution pour la condition initiale donnée.

(b) La solution n'est pas maximale, car l'expression qui définit la fonction $y(x)$ satisfait l'équation pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 1 + xe^{-x} \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq x_0 = -0.5671432904\ldots$. (On peut calculer x_0 par la méthode de bissection en utilisant que la fonction g est continue et que $g(-1) = 1-e < 0$ et $g(0) = 1 > 0$. Mais pour cet exercice, il suffit de constater que $x_0 \in]-1, 0[$ par ce même raisonnement.)

La solution maximale $y_{\max}$ pour la condition initiale $y_{\max}(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$ est donc donnée par la même expression pour $y(x)$ mais interprétée comme fonction sur l'intervalle $]x_0, \infty[$.

(c) Soit $x_1 > x_0$ et soit $y_1 = y(x_1)$. La fonction $y(x)$ est alors aussi solution de l'équation différentielle pour la condition initiale $y(x_1) = y_1$.