Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.
En coordonnées polaire, on a

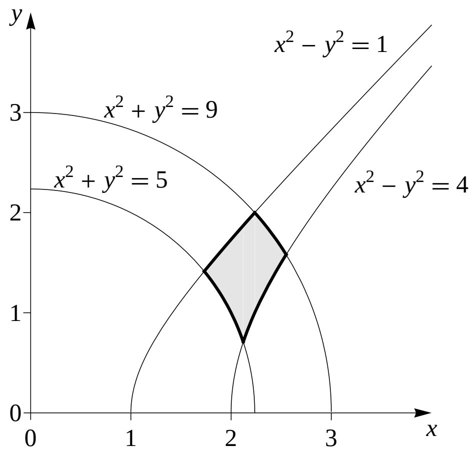
$$D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid 0 \le r \le R \quad \text{et} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

On trouve donc (sans oublier le jacobien r !)

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1\, dxdy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r\, d\varphi\right) dr = \int_0^R 2\pi r\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^R = \pi R^2.$$

Solution 2.
(a) Le domaine D est représenté ci-contre. Pour le changement de variables, on définit l'application $H\colon D \to E$ telle que $(u,v) = H(x,y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 = H_1(x,y) \\ v = x^2 - y^2 = H_2(x,y) \end{cases}$$



Il suit de la définition de D que $E = [5,9] \times [1,4]$. La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det\big(J_H(x,y)\big) = -8xy$.

Soit $G = H^{-1}\colon E \to D$ la transformation inverse telle que $(x,y) = G(u,v)$. Pour calculer l'intégrale, on a besoin du Jacobien de G qui est

$$\det\big(J_G(u,v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x,y)\big)}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[-\frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)}$$

Comme $xy \neq 0$ sur D, le jacobien de G est bien défini. L'intégrale est donc

$$\begin{aligned} \int_D x^3y^3\, dx\, dy &= \int_E \Big[x^3y^3\Big]_{(x,y)=G(u,v)} \cdot \left|\det\left(J_G(u,v)\right)\right|\, du\, dv \\ &= \int_E \left[x^3y^3 \cdot \frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)} du\, dv = \frac{1}{8}\int_E \Big[x^2y^2\Big]_{(x,y)=G(u,v)} du\, dv. \end{aligned}$$

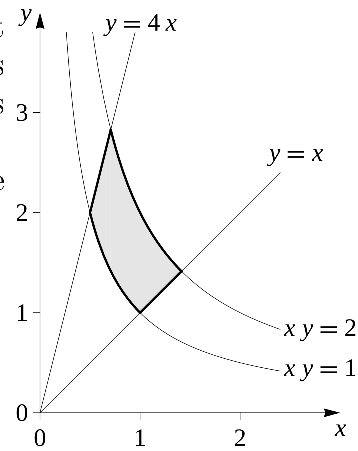
Pour exprimer x et y en fonction de u et v, observons que $2x^2 = u+v$ et $2y^2 = u - v$. Ainsi

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}(u+v)(u-v) = \frac{1}{4}(u^2-v^2)$$

et l'intégrale devient

$$\begin{aligned}\int_D x^3y^3\,dx\,dy &= \frac{1}{32}\int_1^4 \left(\int_5^9 (u^2-v^2)\,du\right)dv = \frac{1}{32}\int_1^4 \left[\frac{1}{3}u^3 - uv^2\right]_{u=5}^{u=9} dv \\ &= \frac{1}{32}\int_1^4 \left(\frac{9^3-5^3}{3} - 4v^2\right)dv = \frac{1}{24}\int_1^4 (151-3v^2)\,dv \\ &= \frac{1}{24}\Big[151v - v^3\Big]_1^4 = \frac{390}{24} = \frac{65}{4}\,.\end{aligned}$$

(b) Le domaine D se trouve dans le premier quadrant (car $x, y \geq 0$) et est délimité d'une part par les droites $y = x$ et $y = 4x$ et d'autre part par les courbes $xy = 1$ et $xy = 2$ (voir ci-contre).
Pour calculer l'intégrale on définit le changement de variable $H\colon D \to E$, où $(u,v) = H(x,y)$ avec



$$\begin{cases} u = xy = H_1(x,y) \\ v = \frac{y}{x} = H_2(x,y) \end{cases}$$

et, par définition de D, $E = [1,2]\times[1,4]$.

La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det\big(J_H(x,y)\big) = 2\frac{y}{x}$ qui est bien défini sur D car $x \neq 0$.
Soit $G = H^{-1}\colon E \to D$ la transformation inverse telle que $(x,y) = G(u,v)$. Le Jacobien de G est alors

$$\det\big(J_G(u,v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x,y)\big)}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[\frac{x}{2y}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \frac{1}{2v}$$

car $v = \frac{y}{x}$. Comme $v > 0$ sur E, ce Jacobien est bien défini. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_D x^2y^2\,dx\,dy &= \int_1^4\left(\int_1^2 \frac{u^2}{2v}\,du\right)dv = \int_1^4 \frac{1}{2v}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{u=1}^{u=2} dv = \int_1^4 \frac{7}{6}\,\frac{1}{v}\,dv \\ &= \frac{7}{6}\Big[\ln(v)\Big]_1^4 = \frac{7}{6}\,\ln(4) = \frac{7}{3}\,\ln(2)\,.\end{aligned}$$

Solution 3.
On introduit des nouvelles coordonnées par l'application $H\colon D \to E$ telle que $(u,v) = H(x,y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad E = [3,4] \times [1,2]\,.$$

La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix},$$

et son Jacobien est $\det(J_H(x,y)) = -8xy$. Soit l'application inverse $G = H^{-1}$. On a

$$\left|\det\left(J_G(u,v)\right)\right| = \left[\frac{1}{\left|\det\left(J_H(x,y)\right)\right|}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[\frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)}.$$

Comme $xy > 0$ pour $(x,y) \in D$, le jacobien de G est bien défini.

Dans les nouvelles coordonnées on a

$$\begin{aligned} I = \int_D (x^5y + y^5x)\,dx\,dy &= \int_E \Big[\left(x^5y + y^5x\right)\Big]_{(x,y)=G(u,v)} \cdot \left|\det\left(J_G(u,v)\right)\right|\,du\,dv \\ &= \int_E \left[\left(x^5y + y^5x\right) \cdot \frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv \\ &= \frac{1}{8}\int_E \left[x^4 + y^4\right]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv \end{aligned}$$

On a $u^2 = (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ et $v^2 = (x^2-y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ et donc

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16}\int_1^2 \left(\int_3^4 \left(u^2+v^2\right) du\right) dv \\ &= \frac{1}{16}\int_1^2 \left[\frac{1}{3}u^3 + uv^2\right]_{u=3}^{u=4} dv = \frac{1}{16}\int_1^2 \left(\frac{4^3-3^3}{3} + v^2\right) dv = \frac{1}{48}\Big[37v + v^3\Big]_1^2 = \frac{11}{12}\,. \end{aligned}$$

Solution 4.
Le volume cherché V est donné par une intégrale triple sur le domaine représenté à la Fig. 1 ci-dessous. Observons que le domaine est défini par les inégalités suivantes :

$$x^2 + z^2 \le 1\,, \qquad x + y + z \ge 1\,, \qquad 2y - z \le 6 \qquad \text{et} \qquad z \ge 0\,.$$

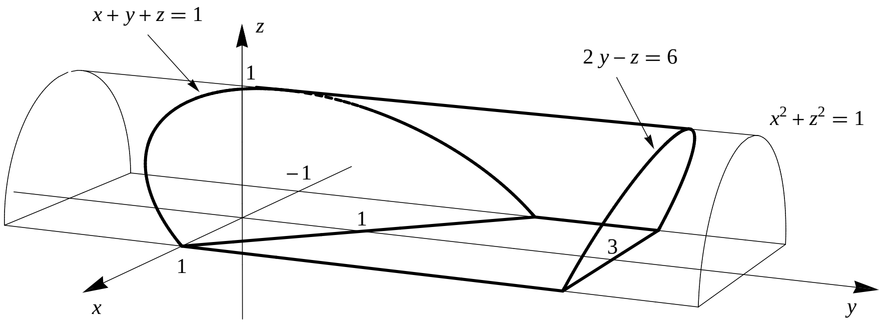


FIGURE 1 –

A partir de ces contraintes (et en regardant la Fig. 1), on trouve que les bornes de l'intégrale triple sont

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad 1-x-z \leq y \leq 3+\frac{z}{2}\ .$$

On a donc

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{1-x-z}^{3+\frac{z}{2}} dy\right) dz\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(3+\frac{z}{2}-(1-x-z)\right) dz\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(2+x+\frac{3}{2}z\right) dz\right) dx = \int_{-1}^{1}\left[(2+x)z+\frac{3}{4}z^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left((2+x)\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}(1-x^2)\right) dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\, dx\,,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que la fonction $x\sqrt{1-x^2}$ est impaire et donc son intégrale entre -1 et 1 est nulle.

Pour la première intégrale, on pose le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin(t)$ si bien que $\varphi'(t) = \cos(t)$ et la nouvelle variable t varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On trouve alors

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varphi(t)^2}\cdot\varphi'(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\, dt$$

qu'on intègre par parties avec $f'(t) = g(t) = \cos(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\, dt &= \Big[\sin(t)\cos(t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)^2\, dt = 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos(t)^2\right) dt \\
&= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\, dt\,.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^2\, dt = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$V = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \pi + \frac{3}{4}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \pi + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = \pi + 1\,.$$

Solution 5.

Méthode 1: On utilise les coordonnées cylindriques (r,φ,z) définies par $G : E \to D$ telle que

$$(x,y,z) = G(r,\varphi,z) = \big(\,r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi),\ z\,\big).$$

Le Jacobien est donc

$$J_G(r,\varphi,z) = \det\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r\,.$$

Les équations du cône $x^2+y^2 = \left(\frac{1}{2}z-3\right)^2$ et de la sphère $x^2+y^2+(z-1)^2 = 25$ s'écrivent en coordonnées cylindriques comme $r^2 = \left(\frac{1}{2}z-3\right)^2$ et $r^2+(z-1)^2 = 25$. A l'extérieur du cône on a alors $r^2 \geq \left(\frac{1}{2}z-3\right)^2$ et à l'intérieur de la sphère on a $r^2+(z-1)^2 \leq 25$. En combinant ces deux équations on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}z-3\right)^2 + (z-1)^2 \leq 25 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}z^2 - 3z + 9 + z^2 - 2z + 1 \leq 25\\ \Leftrightarrow \quad \frac{5}{4}z^2 - 5z - 15 \leq 0 \Leftrightarrow \quad z^2 - 4z - 12 \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+2)(z-6) \leq 0\\ &\Leftrightarrow \quad z \geq -2 \quad \text{et} \quad z \leq 6\,.\end{aligned}$$

Ainsi

$$E = \left\{(r,\varphi,z)\ :\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,,\ 3 - \tfrac{1}{2}z \leq r \leq \sqrt{25-(z-1)^2}\,,\ -2 \leq z \leq 6\right\}$$

et le volume est donc

$$\begin{aligned}\int_D dx\,dy\,dz &= \int_E |J_G(r,\varphi,z)|\,dr\,d\varphi\,dz = \int_{-2}^{6}\left(\int_{3-\frac{z}{2}}^{\sqrt{25-(z-1)^2}}\left(\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\right)dr\right)dz\\ &= 2\pi\int_{-2}^{6}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{3-\frac{z}{2}}^{\sqrt{25-(z-1)^2}} dz = \pi\int_{-2}^{6}\left(15 + 5z - \frac{5}{4}z^2\right)dz\\ &= 5\pi\left[3z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{12}z^3\right]_{-2}^{6} = 5\pi\left(24 + 16 - \frac{56}{3}\right) = \frac{320\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

Comme illustration, l'intersection de D avec le plan $x = 0$ est représentée à la Fig. 2.

Méthode 2: On remarque que c'est le solide de rotation engendré par la rotation de

$$D_0 = \left\{(y,z) \mid y^2 + (z-1)^2 \leq 25 \quad \text{et} \quad y \geq \frac{1}{2}z - 3\right\}$$

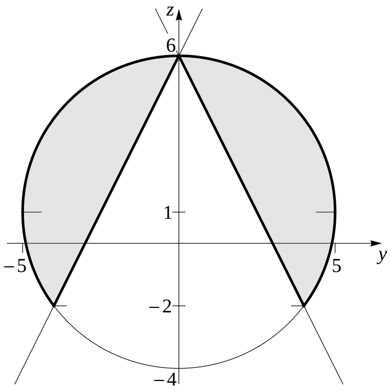


Figure 2 –

autour de l'axe z. Ainsi, par un résultat du cours

$$\mathrm{Vol}(D) = 2\pi R_{cg} \mathrm{Aire}(D_0).$$

La distance R_{cg} entre le centre de gravité et l'axe des z est la coordonnée y du centre de gravité, donc

$$R_{cg} = \frac{1}{\mathrm{Aire}(D_0)} \int_{D_0} y \, dydz.$$

On simplifie alors les $\mathrm{Aire}(D_0)$ pour trouver

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) = 2\pi \int_{D_0} y\, dydz &= 2\pi \int_{-2}^{6} \left(\int_{\frac{1}{2}z-3}^{\sqrt{25-(z-1)^2}} y \, dy \right) dz \\
&= \pi \int_{-2}^{6} \left((25 - (z-1)^2) - (\frac{1}{2}z - 3)^2 \right) dz \\
&= \pi \int_{-2}^{6} \left(-\frac{5z^2}{4} + 5z + 15 \right) dz = \frac{320\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Solution 6.
La masse totale du domaine D est donnée par l'intégrale triple

$$I = \int_D \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \, .$$

Le domaine est donné par les inégalités

$$0 \leq x \leq 1 \, , \qquad x^2 \leq y \leq 1 \qquad \text{et} \qquad y \leq z \leq 1 \, ,$$

et l'intégrale triple peut donc être exprimée par des intégrales itérées

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(\int_y^1 z^{7/2} \, e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \, dz \right) dy \right) dx \, .$$

Pour faciliter l'intégration, on change l'ordre d'intégration. Il faut donc récrire les inégalités en changeant le sens de parcours des régions définies par les deux dernières inégalités (cf. Fig. 3).

$$0 \leq x \leq \sqrt{y}$$

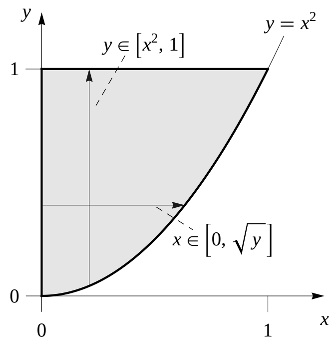


FIGURE 3 –

Les nouvelles inégalités décrivant le domaine D sont

$$0 \leq z \leq 1\,, \qquad 0 \leq y \leq z \qquad \text{et} \qquad 0 \leq x \leq \sqrt{y}\,.$$

L'intégrale triple peut donc aussi être exprimée en terme des intégrales itérées suivantes :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{y}} z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}}\, dx \right) dy \right) dz\,.$$

On a successivement

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^z \left[z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} x \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^z z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \sqrt{y}\ dy \right) dz$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^z z^{7/2} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \right) \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2} z^{3/2} y^{1/2} \right) e^{-y^{3/2} z^{3/2}}}_{=\varphi'(y)\exp(\varphi(y))}\ dy \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \left(z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right) \right]_{y=0}^{y=z} dz = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left[z^2\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right]_{y=0}^{y=z} dz$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2\ e^{-z^3} - z^2 \right) dz$$

et donc

$$I = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2\ e^{-z^3} - z^2 \right) dz = -\frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{-z^3} - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{9e}\,.$$

Solution 7.

Des coordonnées indiquées sur la figure de l'énoncé on déduit que le haut du domaine (partie grise sur la Fig. 4 ci-dessous) appartient au plan d'équation $y + 2z = 2$.

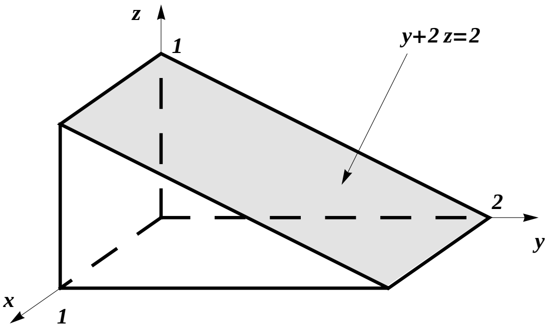


FIGURE 4 –

Ainsi les bornes du domaine D sont

$$0 \leq x \leq 1\,, \qquad 0 \leq y \leq 2 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq z \leq \frac{2-y}{2}\ .$$

La masse totale I est donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2\,dz \right) dy \right) dx \\
&= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2\,dx \right) = 2 \left(\int_0^2 (2-y)\,dy \right) \left(\int_0^1 x^2\,dx \right) \\
&= 2 \cdot \left[2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Le centre de gravité est alors $G = \left(\frac{I_1}{I},\ \frac{I_2}{I},\ \frac{I_3}{I} \right)$, où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_D x \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^3\,dz \right) dy \right) dx \\
&= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^3\,dx \right) = 4 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_D y \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2 y\,dz \right) dy \right) dx \\
&= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} y\,dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2\,dx \right) = 2 \left(\int_0^2 y(2-y)\,dy \right) \cdot \frac{1}{3} \\
&= 2 \cdot \left[y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^2 \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_D z\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^2\left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2 z\,dz\right)dy\right)dx \\
&= 4\left(\int_0^2\left(\int_0^{(2-y)/2} z\,dz\right)dy\right)\left(\int_0^1 x^2\,dx\right) = 4\left(\int_0^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{(2-y)/2} dy\right)\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^2 (2-y)^2\,dy\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(2-y)^3\right]_0^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi le centre de gravité est $G = \left(\frac{3}{4},\,\frac{2}{3},\,\frac{1}{3}\right)$.

Solution 8.
Soit D le domaine de l'ennoncé. Comme D est un secteur sphérique, on utilise les coordonnées sphériques $G : E \to D$ telles que

$$(x,y,z) = G(r,\theta,\varphi) = \big(\,r\sin(\theta)\cos(\varphi),\ r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ r\cos(\theta)\,\big)$$

et donc le Jacobien de ce changement de coordonnées est

$$J_G(r,\theta,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin(\theta)\ .$$

Sur la figure de l'énoncé on voit que le domaine d'intégration E est défini par

$$0 \le r \le 2\,, \qquad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\,.$$

Comme la densité de masse est proportionnelle à la distance à l'origine (notons qu'une éventuelle constante de proportionnalité s'annule dans le calcul du centre de gravité), elle est $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et son analogue exprimé en coordonnées sphériques est $\bar\rho(r,\theta,\varphi) = r$.

On calcule d'abord la masse totale I du domaine

$$
\begin{aligned}
I &= \int_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_E \bar\rho(r,\theta,\varphi)\,|J_G(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^2 r^3\sin(\theta)\,dr\right)d\theta\right)d\varphi = \left(\int_0^2 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi\right) \\
&= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2\cdot\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\pi = 4\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\pi = 2\pi(2-\sqrt{2})\,.
\end{aligned}
$$

Notons que $\sin(\theta) \ge 0$ pour $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et donc $|J_G(r,\theta,\varphi)| = r^2\sin(\theta)$ (sans valeur absolue).

La coordonnée z_G du centre de gravité de D est alors

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{I}\int_D z\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{I}\int_E z(r,\theta,\varphi)\,\bar{\rho}(r,\theta,\varphi)\,|J_G(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \frac{1}{I}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^2 r\cos(\theta)\cdot r^3\sin(\theta)\,dr\right)d\theta\right)d\varphi \\
&= \frac{1}{I}\left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\right) \\
&= \frac{1}{I}\cdot\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^2\cdot\left[\frac{1}{2}\sin(\theta)^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\pi = \frac{1}{I}\cdot\frac{32}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{1}{2\pi(2-\sqrt{2})}\cdot\frac{8\pi}{5} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{5}\,.
\end{aligned}
$$

Solution 9.
La construction du tore D implique que son grand rayon est a est son petit rayon est b. Pour intégrer sur D on utilise les coordonnées dites *curvilignes* (cf Fig. 5): On a (t,β,φ) définies par $G : E \to D$ telles que

$$(x,y,z) = G(t,\beta,\varphi) = \big(\,(a+t\cos(\beta))\cos(\varphi),\ (a+t\cos(\beta))\sin(\varphi),\ t\sin(\beta)\,\big)$$

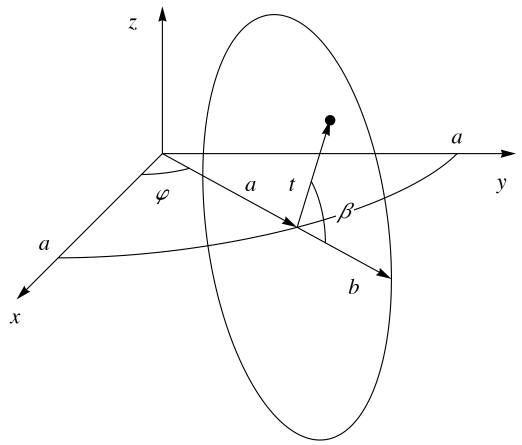


Figure 5 –

Le Jacobien de ce changement de coordonnées est

$$
\begin{aligned}
J_G(t,\beta,\varphi) &= \det\begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\varphi) & -t\sin(\beta)\cos(\varphi) & -(a+t\cos(\beta))\sin(\varphi) \\ \cos(\beta)\sin(\varphi) & -t\sin(\beta)\sin(\varphi) & (a+t\cos(\beta))\cos(\varphi) \\ \sin(\beta) & t\cos(\beta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= -t(a+t\cos(\beta))
\end{aligned}
$$

et on a $|J_G(t,\beta,\varphi)| = t(a+t\cos(\beta))$ parce que $a > t$ et donc le terme dans la parenthèse est positif. Puisque

$$E = \{(t,\beta,\varphi)\ :\ 0\le t\le b\,,\ 0\le\beta\le 2\pi\ \ 0\le\varphi\le 2\pi\}\,,$$

l'intégrale devient

$$\begin{aligned}
I &= \int_D z^2\,dx\,dy\,dz = \int_E z(t,\beta,\varphi)^2\,|J_G(t,\beta,\varphi)|\;dt\,d\beta\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^b \big(t\sin(\beta)\big)^2\cdot t\big(a+t\cos(\beta)\big)\,dt\right)d\beta\right)d\varphi\\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}\left(\sin(\beta)^2\int_0^b \big(at^3+t^4\cos(\beta)\big)\,dt\right)d\beta\right)\\
&= 2\pi\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\left(\frac{1}{4}ab^4+\frac{1}{5}b^5\cos(\beta)\right)d\beta\\
&= \frac{\pi}{2}ab^4\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta+\frac{2\pi}{5}b^5\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\cos(\beta)\,d\beta\\
&= \frac{\pi}{2}ab^4\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta+\frac{2\pi}{5}b^5\left[\frac{1}{3}\sin(\beta)^3\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}ab^4\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta\,.
\end{aligned}$$

En intégrant la dernière intégrale par parties on trouve

$$\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta = \Big[-\cos(\beta)\sin(\beta)\Big]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos(\beta)^2\,d\beta = 2\pi-\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta=\pi$$

et donc $I=\dfrac{\pi^2ab^4}{2}$.

Solution 10.
L'aire de D a été calculée a l'exercice 8 de la série 12 ; elle vaut 6. Par symétrie, le centre de gravité (pour distribution de masse uniforme) est le point $\boldsymbol{c}=(\frac{7}{2},3)$. On peut donc utiliser le résultat du cours pour les solides de rotation:

(a) La distance entre $\boldsymbol{c}$ et l'axe des x est la coordonnée y de $\boldsymbol{c}$, donc 3. Ainsi

$$\mathrm{Vol}(D_{rot})=\mathrm{Aire}(D)\cdot 2\pi\cdot 3=36\pi.$$

(b) La distance entre $\boldsymbol{c}$ et l'axe des y est la coordonnée x de $\boldsymbol{c}$, donc $\frac{7}{2}$. Ainsi

$$\mathrm{Vol}(D_{rot})=\mathrm{Aire}(D)\cdot 2\pi\cdot\frac{7}{2}=42\pi.$$

(c) La perpendiculaire à $y=-2x$ passant par $\boldsymbol{c}$ est $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$. Le point d'intersection est donc $\boldsymbol{d}=(-\frac{1}{2},1)$ et la distance entre $\boldsymbol{c}$ et la droite d'équation $y=-2x$ est donc

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Vol}(D_{rot})=\mathrm{Aire}(D)\cdot 2\pi\cdot 2\sqrt{5}=24\sqrt{5}\pi.$$