Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) Soient x et y les longueurs des cathètes d'un triangle rectangle. Son aire est alors $A = \frac{xy}{2}$ et l'hypothénuse est de longueur $\sqrt{x^2+y^2}$. Pour simplifier, on définit une fonction-objectif équivalente, c.-à-d. $f(x,y) = x^2+y^2$ qu'on veut minimiser sous la contrainte $g(x,y) = xy - 2A = 0$.

Notons que $\nabla g(x,y) = (x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0)$ mais que $g(0,0) = -2A \neq 0$. Donc $\nabla g(x,y) \neq 0$ pour tout (x,y) satisfaisant $g(x,y) = 0$. La fonction de Lagrange est alors

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2+y^2 - \lambda(xy-2A)$$

ce qui mène au système

$$\begin{cases} F_x = 2x - \lambda y & = 0 \qquad (1)\\ F_y = 2y - \lambda x & = 0 \qquad (2)\\ F_\lambda = -(xy-2A) & = 0 \qquad (3)\end{cases}$$

pour les points stationnaires de F.

De (1) on trouve $x = \frac{\lambda}{2}y$, d'où $(2 - \frac{1}{2}\lambda^2)y =$ par (2). Si $y = 0$, (3) ne peut être satisfaite, donc on $\lambda^2 = 4$, ou encore $\lambda = \pm 2$. Ainsi $x = \pm y$ mais comme x, y sont les deux positifs, on doit avoir $x = y$. Il découle alors de (3) que $x = y = \sqrt{2A}$. Par conséquent le triangle rectangle avec hypothénuse minimale est le triangle rectangle isocèle dont chaque cathète vaut $\sqrt{2A}$.

(b) On cherche le minimum de la fonction-objectif $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (distance du point (x,y,z) à l'origine au carré) sur l'ensemble $\Gamma := \{(x,y,z) : g_1(x,y,z) = 0 \text{ et } g_2(x,y,z) = 0\}$ avec

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 \qquad \text{et} \qquad g_2(x,y,z) = x+y-z+1.$$

On peut montrer que $\nabla g_1(x,y,z) = (2x,2y,-2z)$ et $\nabla g_2(x,y,z) = (1,1,-1)$ sont linéairement indépendants sur Γ par un argument similaire à celui à l'Ex. 6 (b) de la série 11.

La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) - \lambda\, g_1(x,y,z) - \mu\, g_2(x,y,z)\\ &= x^2+y^2+z^2 - \lambda(x^2+y^2-z^2) - \mu(x+y-z+1)\end{aligned}$$

d'où le système

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda x - \mu = 2(1-\lambda)x - \mu & = 0 \qquad (1)\\ F_y = 2y - 2\lambda y - \mu = 2(1-\lambda)y - \mu & = 0 \qquad (2)\\ F_z = 2z + 2\lambda z + \mu = 2(1+\lambda)z + \mu & = 0 \qquad (3)\\ F_\lambda = -(x^2+y^2-z^2) & = 0 \qquad (4)\\ F_\mu = -(x+y-z+1) & = 0 \qquad (5)\end{cases}$$

En faisant (1) − (2) on trouve $2(1-\lambda)(x-y)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$ ou $x=y$.

Si $\lambda = 1$, alors $\mu = 0$ et par (3) on a $z = 0$. Par (4) il suit que $x = y = 0$. Mais $(0,0,0)$ ne satisfait pas (5), donc ce n'est pas une solution.

Si $x = y$, alors $z = 2x+1$ par (5). Pour un point de la forme $(x, x, 2x+1)$, (4) s'écrit

$$2x^2 + 4x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = y \quad \text{et} \quad z = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Il reste alors à vérifier que ces valeurs de (x, y, z) sont compatibles avec les équations (1) et (3). Pour ceci, insérons les valeurs obtenues dans (1) et (3) et écrivons le tout sous forme matricielle $A\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = b$:

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \mu = 0 \\ 2(1+\lambda)\left(-1 \pm \sqrt{2}\right) + \mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} & 1 \\ -2 \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} \\ 2 \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = \pm\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2} = \mp\sqrt{2} \neq 0$, il existe des solutions pour λ et μ (qu'on n'a pas besoin de chercher).

Ainsi les solutions du système $\nabla F = 0$ sont

$$p_1 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right) \qquad \text{et}$$

$$p_2 = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}\right).$$

et

$$f\left(-1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 \pm \sqrt{2}\right) = 2\left(-1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)^2 = 6 \mp 4\sqrt{2}$$

Ainsi p_1 réalise la distance minimale $6 - 4\sqrt{2}$.

(c) Observons d'abord que les deux axes de l'ellipse sont les droites qui passent par le centre et les deux points sur l'ellipse dont la distance au centre est maximale respectivement minimale. On cherche donc les extremums de la distance au centre.

Comme l'axe du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ est l'axe z, le centre de l'ellipse se trouve aussi sur l'axe z, i.e. il est de la forme $(0, 0, z)$. De plus, l'ellipse est dans le plan $x + y + 2z = 2$, et donc son centre est $(0, 0, 1)$. On cherche donc les droites qui contiennent les extremums de la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2,$$

sur $\Gamma = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\}$, où $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$ et $g_2(x, y, z) = x + y + 2z - 2$.

Or, $\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$ et $\nabla g_2(x,y,z) = (1,1,2)$ sont linéairement dépendants seulement en des points $(0,0,z)$ qui ne sont pas contenus dans le cylindre.

En posant $F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda\, g_1(x,y,z) - \mu\, g_2(x,y,z)$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda x - \mu & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 2y - 2\lambda y - \mu & = 0 \qquad (2) \\ F_z = 2z - 2 - 2\mu & = 0 \qquad (3) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 4) & = 0 \qquad (4) \\ F_\mu = -(x + y + 2z - 2) & = 0 \qquad (5) \end{cases}$$

De (1) et (2) on obtient $x = \frac{\mu}{2(1-\lambda)} = y$. Supposons donc pour l'instant que $\lambda \neq 1$, le cas $\lambda = 1$ sera traité après. Par (3) on a

$$z = \mu + 1 \qquad \text{et donc} \qquad x = y = \frac{z-1}{2(1-\lambda)}. \tag{6}$$

En récrivant (5) en fonction de z, on a

$$\frac{z-1}{1-\lambda} + 2z - 2 = \left(2 + \frac{1}{1-\lambda}\right)(z-1) = 0 \qquad \Rightarrow z = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{3}{2}.$$

Quand $z = 1$, il suit de (6) que $x = y = 0$. Mais le point $(0,0,1)$ ne satisfait pas (4), donc ce n'est pas une solution.

Quand $\lambda = \frac{3}{2}$, (6) implique que $x = y = 1 - z$ et si bien que (4) devient

$$2(1-z)^2 - 4 = 2(z^2 - 2z - 1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1 \pm \sqrt{2}$$

et donc $x = y = \mp\sqrt{2}$.

Lorsque $\lambda = 1$, on a $\mu = 0$ par (1) et (2), d'où il suit par (3) que $z = 1$. De (5) on tire que $x = -y$, qui, inséré dans (4), donne

$$2y^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = \mp\sqrt{2}.$$

Les solutions du système sont donc

$$(x,y,z) \in \Big\{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1-\sqrt{2}), \\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)\Big\}$$

et on a

$$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1-\sqrt{2}) = 6 \qquad \text{et}$$

$$f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1) = 4.$$

Ainsi le grand axe de l'ellipse est sur la droite d_1 et le petit axe sur la droite d_2 définies par

$$d_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = t, z = 1 - t, t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = s, y = -s, z = 1, s \in \mathbb{R}\}.$$

Noter qu'on a utilisé le centre $(0, 0, 1)$ de l'ellipse comme point de référence.

Solution 2.

(a) On note x, y les dimensions de la base rectangulaire, et z la hauteur. Le volume est xyz, et la surface est $xy+2xz+2yz$. On cherche donc à optimiser $f(x, y, z) = xyz$ sous la contrainte $g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0$. On introduit la fonction de Lagrange

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = xyz - \lambda(xy + 2xz + 2yz - 12).$$

Le système a résoudre est donc

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} yz - \lambda(y + 2z) \\ xz - \lambda(x + 2z) \\ xy - \lambda(2x + 2y) \\ -xy - 2xz - 2yz + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La première équation donne $\lambda = \frac{yz}{y+2z}$ (on peut exclure le cas $y+2z = 0$, car cela mène à une solution où $y = 0$ ou $z = 0$, qui ne donne pas le volume maximal). On remplace cela dans la deuxième équation pour finalement trouver $x = y$ (en excluant le cas $z = 0$). De là, on déduit facilement que la seule solution avec x, y, z positifs est

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 1, \quad (\text{et } \lambda = \frac{1}{2}).$$

Il faut donc prendre une base carrée de 2 m de côté et une hauteur de $1m$ pour avoir un volume maximal de 4 m^3.

(b) La situation est similaire au point (a), mais la fonction objectif et la contrainte sont inversées. La fonction à minimiser est $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sous la contrainte $g(x, y, z) = xyz - 4 = 0$. On écrit la fonction de Lagrange

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - \lambda xyz.$$

Le système a résoudre est donc

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} y + 2z - \lambda yz \\ x + 2z - \lambda xz \\ 2x + 2y - \lambda xy \\ 4 - xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En soustrayant la première équation (multipliée par x) avec la seconde (multipliée par y), puis en divisant par $2z$, on trouve que $y = x$. On remplace dans la troisième pour trouver $\lambda = \frac{4}{x}$, d'où, en utilisant la deuxième à nouveau, on tire $z = \frac{x}{2}$. On remplace dans la dernière, pour trouver $x = 2$, et donc $y = 2$, $z = 1$. La surface minimale est donc bien $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12\ m^2$.

(c) On obtient les mêmes valeurs d'aire et de volume. C'est intuitivement clair: si avec 12 m^2 de carton, on forme une boite d'un volume maximal de 4 m^3 (point (a)), alors on a besoin d'au minimum 12 m^2 de carton pour une boite d'un volume de 4 m^3 (sinon on aurait "pu faire mieux" au point (a)).

Solution 3.

(a) Intégrer d'abord par rapport à x correspond à l'intégrale donnée. On obtient

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{4}x^4 - y^{1/3}\, x \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} - y^{1/3} \right) dy$$
$$= \left[\frac{1}{4}y - \frac{3}{4}y^{4/3} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1 - 3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

(b) En inversant l'ordre d'intégration on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^3 y - \frac{3}{4}y^{4/3} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1 - 3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Les résultats sont les mêmes (Théorème de Fubini-Tonelli).

Solution 4.

(a) Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 1. On a

$$\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 \cos(x+y)\, dx \right) dy = \int_{-1}^2 \Big[\sin(x+y) \Big]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_{-1}^2 \big(\sin(1+y) - \sin(y) \big) dy = \Big[-\cos(1+y) + \cos(y) \Big]_{-1}^2$$
$$= 1 - \cos(1) + \cos(2) - \cos(3)\,.$$

(b) Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 2. On a

$$\int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{x+y}\, dy \right) dx = \int_0^1 \Big[e^{x+y} \Big]_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 \left(e^{3x} - e^{2x} \right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}\, e^{3x} \right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{1}{2}\, e^{2x} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}\,.$$

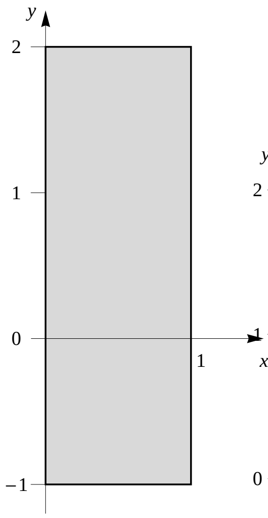


Figure 1 –

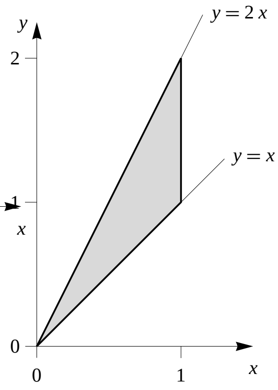


Figure 2 –

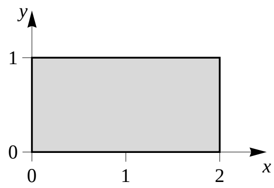


Figure 3 –

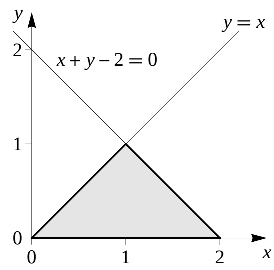


Figure 4 –

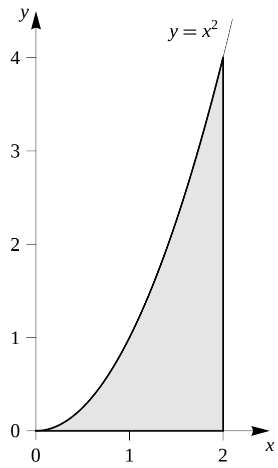


Figure 5 –

Solution 5.

(a) Le domaine D est représenté à la Fig. 3. On a

$$\begin{aligned}\int_D \sqrt{x+y}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \sqrt{x+y}\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}\left((2+y)^{3/2} - y^{3/2}\right) dy = \left[\frac{4}{15}\left((2+y)^{5/2} - y^{5/2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1\right).\end{aligned}$$

(b) Le domaine D est représenté à la Fig. 5 ci-dessus. On a

$$\begin{aligned}\int_D x^2 y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} x^2 y\right) dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^6\,dx \\ = \left[\frac{1}{14}x^7\right]_0^2 = \frac{64}{7}.\end{aligned}$$

(c) Le domaine D est représenté à la Fig. 4 ci-dessus. Observons que $x - y \geq 0$ et $x + y - 2 \leq 0$ sur D. Ainsi $(x-y)(x+y-2) \leq 0$ et donc $f(x,y) =$

$-(x-y)(x+y-2) = -(x^2-2x-y^2+2y)$. On a

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,dx\,dy &= -\int_0^1 \left(\int_0^x (x^2-2x-y^2+2y)\,dy\right)dx \\
&\quad - \int_1^2\int_0^{2-x} (x^2-2x-y^2+2y)\,dy\,dx \\
&= -\int_0^1 \left[(x^2-2x)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&\quad - \int_1^2 \left[(x^2-2x)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&\overset{*}{=} -\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2\right)dx - \int_1^2 \left(\frac{2}{3}(2-x)^3 - (2-x)^2\right)dx \\
&= -\left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}(2-x)^4 - \frac{1}{3}(2-x)^3\right]_1^2 \\
&= -\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Pour l'étape * on a récrit le premier terme dans la deuxième intégrale comme

$$(x^2-2x)(2-x) = -x(2-x)^2 = \big((2-x)-2\big)(2-x)^2 = (2-x)^3 - 2(2-x)^2$$

pour arriver à

$$(x^2-2x)(2-x) - \frac{1}{3}(2-x)^3 + (2-x)^2 = \frac{2}{3}(2-x)^3 - (2-x)^2$$

et ainsi éviter de développer tous les polynômes.

Solution 6.

(a) En respectant l'ordre d'intégration donné, on doit trouver une primitive de la fonction $e^{(x^2)}$ par rapport à x, ce qui est impossible. Il faut donc inverser l'ordre d'intégration et reparamétriser le domaine D qui est représenté à la Fig. 6 ci-dessous.

Dans l'ordre donné, on parcourt D du bas en haut selon des lignes horizontales. Inverser l'ordre d'intégration revient à parcourir D de gauche à droite en selon des lignes verticales. Ainsi x varie entre 0 et 1 et y varie entre 0 et x. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{(x^2)}\,dy\right)dx &= \int_0^1 \left[ye^{(x^2)}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 xe^{(x^2)}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{(x^2)}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(b) On doit de nouveau inverser l'ordre d'intégration pour pouvoir calculer cette intégrale. Il faut donc parcourir le domaine D (cf. Fig. 7) de gauche à droite selon des lignes verticales, c'est-à-dire laisser varier x entre 0 et 1 et y entre 0 et x^3.

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\, dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[y\sqrt{1+x^4} \right]_{y=0}^{y=x^3} dx = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{4}\, 4x^3(1+x^4)^{1/2}\, dx = \left[\frac{1}{6} \left(1+x^4\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \left(2\sqrt{2} - 1 \right)$$

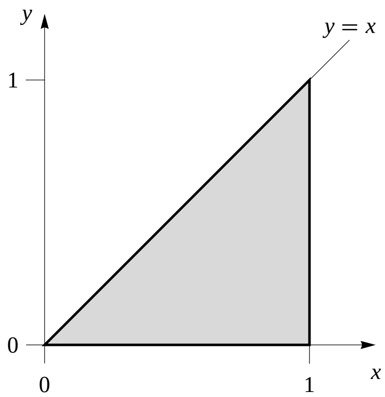


FIGURE 6 –

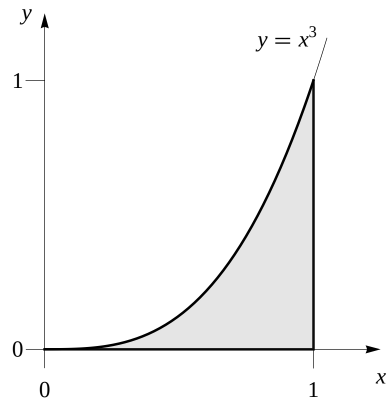


FIGURE 7 –

Solution 7.
Les points du domaine D satisfont

$$-\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad x-6 \leq y \leq x\,;$$

on a donc les inégalités

$$\max\bigl(-\sqrt{x}, x-6\bigr) \leq y \leq \min\bigl(\sqrt{x}, x\bigr) \qquad \text{et} \qquad x-6 \leq \sqrt{x}\,.$$

On fait les calculs :

$$x-6 \leq -\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 4\,,$$

$$x \leq \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 1\,,$$

$$x-6 \leq \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 9\,.$$

Pour $0 \leq x \leq 9$ on a donc

$$\min\left(\sqrt{x}, x\right) = \begin{cases} x & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } \ x > 1 \end{cases} \qquad \text{et}$$

$$\max\left(-\sqrt{x}, x-6\right) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ x-6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

c'est-à-dire D est le domaine représenté à la Fig. 8. (*Remarque:* On peut aussi arriver à ces résultats en traçant les graphes, et puis chercher les points d'intersection nécessaires.)

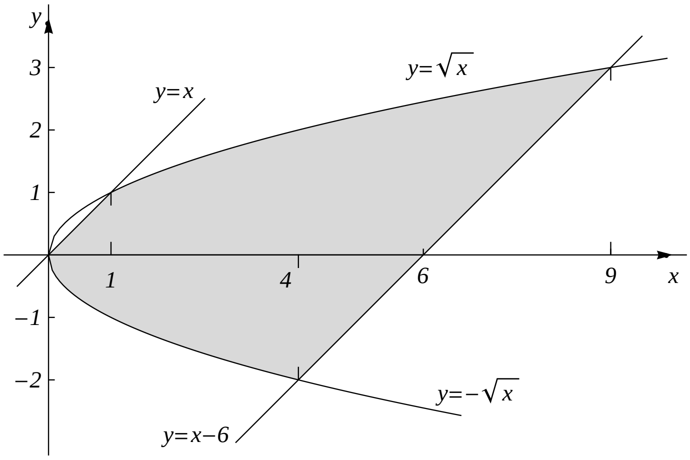


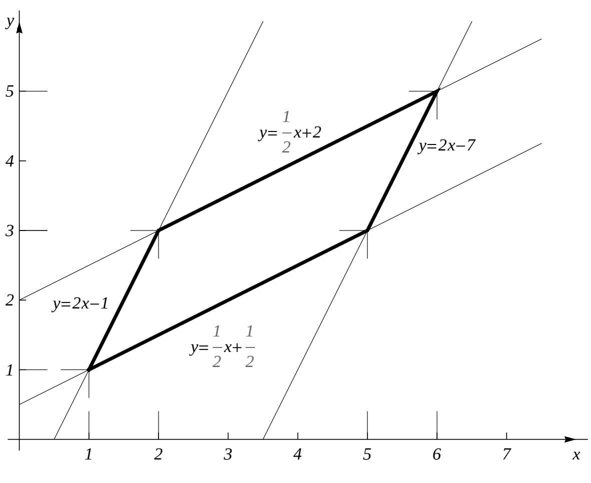
Figure 8 –

On peut décomposer le domaine D en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x=1$ et $x=4$. L'aire de D est alors

$$\begin{aligned}
\int_D dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{x} dy\right) dx + \int_1^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\right) dx + \int_4^9 \left(\int_{x-6}^{\sqrt{x}} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x+\sqrt{x}\right) dx + \int_1^4 2\sqrt{x}\,dx + \int_4^9 \left(\sqrt{x}-x+6\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_4^9 \\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{32}{3}-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{54}{3}-\frac{81}{2}+54\right) - \left(\frac{16}{3}-8+24\right) = \frac{62}{3}\,.
\end{aligned}$$

Solution 8.

Les équations des droites délimitant le parallélogramme D sont:



On décompose le domaine en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x = 2$ et $x = 5$. Ainsi l'aire du parallélogramme est

$$\begin{aligned}
\int_D dx\, dy &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2x-1} dy \right) dx + \int_2^5 \left(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+2} dy \right) dx + \int_5^6 \left(\int_{2x-7}^{\frac{1}{2}x+2} dy \right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx + \int_2^5 \frac{3}{2}\, dx + \int_5^6 \left(-\frac{3}{2}x + 9 \right) dx \\
&= \frac{3}{2} \left(\left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 + \Big[x \Big]_2^5 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_5^6 \right) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6\,.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'aire de D par un changement de variable, il est utile de ré-exprimer les équations des droites comme suit:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ x - 2y &= -4. \end{aligned}$$

On définit alors une application H telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = 2x - y = H_1(x, y) \\ v = x - 2y = H_2(x, y) \end{cases}$$

et on voit que l'image de D par H est $E = [1, 7] \times [-4, -1]$, c'est-à-dire $H\colon D \to E$.

Le matrice jacobienne de H et son jacobien sont

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det\big(J_H(x, y)\big) = -3\,.$$

Soit $G = H^{-1}\colon E \to D$ la transformation inverse telle que $(x, y) = G(u, v)$. Le Jacobien de G se calcule à partir de $J_H(x, y)$:

$$\det\big(J_G(u, v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x, y)\big)} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = -\frac{1}{3}\,.$$

L'aire du parallélogramme est alors

$$\int_D dx\, dy = \int_E \big|\det\big(J_G(u, v)\big)\big|\, du\, dv = \int_{-4}^{-1} \left(\int_1^7 \frac{1}{3}\, du \right) dv = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 6\,.$$

Le résultat est évidemment le même qu'avant. Mais on a vu qu'il est plus rapide d'utiliser un changement de variables adéquat.

Solution 9.

Le disque est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. En coordonnées cartésiennes, on le paramétrise comme:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R, \quad \text{et} \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Ainsi

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1\, dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\, dx.$$

On fait le changement de variable $x = R\sin(\theta)$. Donc $dx = R\cos(\theta)d\theta$ et comme x varie entre $-R$ et R, θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\text{Aire}(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{R^2(1-\sin(\theta))^2} \cdot R\cos(\theta)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^2\cos(\theta)^2\, d\theta.$$

Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser une formule trigonométrique:

$$2\cos(\theta)^2 = \cos(2\theta) + 1.$$

L'intégrale vaut donc

$$R^2 \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta \right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.$$