Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) Le système

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\sin(x) = 0 \\ f_y(x,y) = 6y = 0 \end{cases}$$

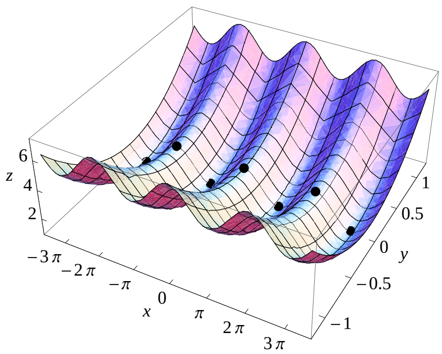
donne les point stationnaires $(x,y) = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -6\cos(x)\,,$$

on a

$$\Lambda_2(k\pi, 0) = \begin{cases} -6, & k \text{ pair} \\ 6, & k \text{ impair} \end{cases}$$

Les points $(k\pi, 0)$ avec k pair sont donc des points selle avec $f(k\pi, 0) = 3$ tandis que pour k impair, l'égalité $\Lambda_1(k\pi, 0) = -\cos(k\pi) = 1 > 0$ implique que f admet des minimums locaux aux points $(k\pi, 0)$ avec $f(k\pi, 0) = 1$:



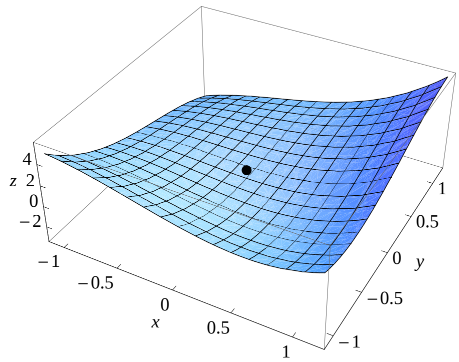
(b) Comme

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 2x + 2y = 0 \\ f_y(x,y) = -3y^2 + 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = 0 \;\Rightarrow\; (x,y) = (0,0),$$

le seul point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 6x+2 & 2 \\ 2 & -6y+2 \end{pmatrix} = -36xy + 12x - 12y\,,$$

on a $\Lambda_2(0,0) = 0$ ce qui ne permet pas de conclure sur la nature du point stationnaire. Mais comme $f(x,-x) = 2x^3$ et $f(0,0) = 0$, la fonction f prend dans tout voisinage de $(0,0)$ des valeurs positives et négatives ; elle admet donc un point selle en $(0,0)$:



(c) On a

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6x + y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y(x - 2y^2) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (0,0),$$

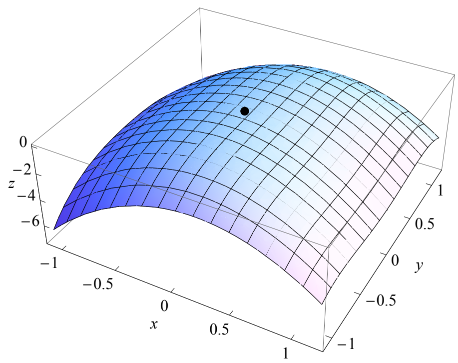
et donc le seul point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. On trouve ensuite

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} -6 & 2y \\ 2y & 2x - 12y^2 \end{pmatrix} = 68y^2 - 12x\,, \qquad \text{d'où} \quad \Lambda_2(0,0) = 0\,.$$

En isolant un carré parfait dans $f(x,y)$, on obtient

$$f(x,y) = -3\left(x - \frac{y^2}{6}\right)^2 - \frac{11}{12}y^4 \qquad \text{ou} \qquad f(x,y) = -\frac{11}{4}x^2 - \left(y^2 - \frac{x}{2}\right)^2,$$

ce qui implique $f(x,y) \leq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(0,0) = 0$, la fonction f admet un maximum local en $(0,0)$:



Remarque: Puisque $f(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; (x,y) = (0,0)$, le maximum de f en $(0,0)$ est absolu.

(d) On résout le système

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = & -4x & + & 4y & & & = 0 \\ f_y(x,y,z) = & 4x & - & 10y & + & 2z & = 0 \\ f_z(x,y,z) = & & & 2y & - & 2z & = 0 \end{cases}$$

pour obtenir le seul point stationnaire $(0,0,0)$. Ensuite on calcule le hessien et les mineurs principaux dominants de la matrice hessienne:

$$\Lambda_3(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \Lambda_1(x,y,z) = -4.$$

En $(0,0,0)$ on a

$$\Lambda_1(0,0,0) = -4 < 0, \qquad \Lambda_2(0,0,0) = 24 > 0 \qquad \text{et} \quad \Lambda_3(0,0,0) = -32 < 0,$$

et donc la fonction f admet un maximum local en $(0,0,0)$ et $f(0,0,0) = 2$.

(e) Pour trouver les points stationnaire, on doit résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_x(x,y,z) = & 4x - 3z^2 & = 0 \\ f_y(x,y,z) = & 3y^2 - 3 & = 0 \\ f_z(x,y,z) = & -6xz + 6z & = 0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{r} 4x - 3z^2 = 0 \\ 3(y^2-1) = 0 \\ -6z(x-1) = 0 \end{array}\right.$$

Donc $y = \pm 1$ et soit $z = 0$ (ce qui implique $x = 0$), soit $x = 1$ (ce qui implique $z = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$). Les points stationnaires de f sont alors

$$(0,1,0),\ (0,-1,0),\ \left(1,1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right),\ \left(1,-1,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right),\ \left(1,1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ et } \left(1,-1,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

On a

$$\begin{aligned} \Lambda_3(x,y,z) = \det H_f(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6z \\ 0 & 6y & 0 \\ -6z & 0 & -6(x-1) \end{pmatrix} \\ &= -72y\big(2(x-1) + 3z^2\big), \\ \Lambda_2(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} &= 24y \quad \text{et} \quad \Lambda_1(x,y,z) = 4\,. \end{aligned}$$

Evaluées aux points stationnaires ces expressions valent

$$\begin{array}{rr} \Lambda_3(0,1,0) = 144 > 0, & \Lambda_2(0,1,0) = 24 > 0 \\ \Lambda_3(0,-1,0) = -144 < 0, & \Lambda_2(0,-1,0) = -24 < 0 \\ \Lambda_3\left(1,1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -288 < 0, & \Lambda_2\left(1,1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 24 > 0 \\ \Lambda_3\left(1,-1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 288 > 0, & \Lambda_2\left(1,-1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -24 < 0 \\ \Lambda_3\left(1,1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -288 < 0, & \Lambda_2\left(1,1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 24 > 0 \\ \Lambda_3\left(1,-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 288 > 0, & \Lambda_2\left(1,-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -24 < 0 \end{array}$$

Comme $\Lambda_1 > 0$, f a un minimum local en $(0,1,0)$ où $f(0,1,0) = 2$, et tous les autres points stationnaires sont des points selle.

Solution 2.

(a) Comme la fonction f admet des dérivées partielles partout à l'intérieur du domaine D, ses extremums absolus se trouvent parmi les points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D.

Points stationnaires à l'intérieur de D:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - y - 1 = 0 \\ f_y(x,y) = -x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (1,1).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_1(x,y) = 2 > 0\,,$$

le point $(1,1)$ est un minimum local de f. De plus on a $f(1,1) = -1$.

Sur le bord de D on a:

Notons d'abord que le bord de D est l'union des trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,0) : 0 \leq x \leq 3\} \cup \{(0,y) : 0 \leq y \leq 3\} \cup \{(x, 3-x) : 0 \leq x \leq 3\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, && 0 \leq x \leq 3\,, \\ f(0,y) &= y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, && 0 \leq y \leq 3\,, \\ f(x,3-x) &= 3(x^2 - 3x + 2) = 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right], && 0 \leq x \leq 3\,. \end{aligned}$$

L'idée est maintenant de chercher les extremums de ces fonctions unidimensionnelles dans le domaine précisé qui se trouvent soit aux points stationnaires soit aux extrémités du domaine (cf. Analyse I). Notons d'abord $g(x) = f(x,0)$. Alors $g'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Puisque $g''(x) = 2 > 0$, g a un minimum local en $x = \frac{1}{2}$. De plus on a $g(0) = 0$ et $g(3) = 6$. On a donc

$$\max_{0 \leq x \leq 3} f(x,0) = f(3,0) = 6 \qquad \text{et} \qquad \min_{0 \leq x \leq 3} f(x,0) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

De même, on cherche les extremums des fonctions $h(y) = f(0,y)$ et $k(x) = f(x, 3-x)$. La fonction h a exactement le même comportement que g et pour k on a

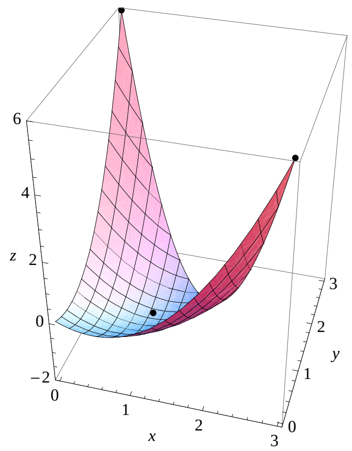
$$k'(x) = 6\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3}{2}, \qquad k\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4},$$
$$k''(x) = 6 > 0 \quad (\Rightarrow \text{ minimum local}), \qquad k(0) = k(3) = 6,$$

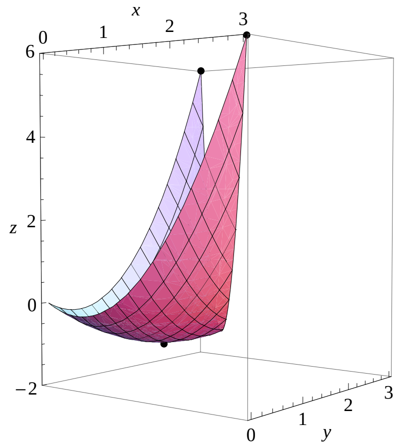
si bien qu'on obtient

$$\max_{0\le y\le 3} f(0,y) = f(0,3) = 6\,, \qquad \min_{0\le y\le 3} f(0,y) = f\left(0,\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}\,,$$

$$\max_{0\le x\le 3} f(x,3-x) = f(3,0) = f(0,3) = 6\,, \quad \min_{0\le x\le 3} f(x,3-x) = f\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4}\,.$$

Il s'en suit que f admet un minimum absolu en $(1,1)$ de valeur $f(1,1) = -1$ et des maximums absolus en $(3,0)$ et en $(0,3)$ de valeur $f(3,0) = f(0,3) = 6$:





(b) Comme f est de classe C^2 sur D, ses extremums absolus se trouvent soit en un point stationnaire à l'intérieur de D, soit sur le bord de D.

<u>Points stationnaires à l'intérieur de D:</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y) = & 4x & - & y & - & 6 = 0 \\ f_y(x,y) = & -x & + & 4y & - & 6 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (2,2).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 15 > 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_1(x,y) = 4 > 0\,,$$

le point $(2,2)$ est un minimum local de f. De plus on a $f(2,2) = -12$.

<u>Sur le bord de D on a:</u>

Le bord de D est l'union des deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{(x,0) : -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}\right\} \cup \left\{(x,\sqrt{32-x^2}) : -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}\right\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$f(x,0) = 2x^2 - 6x = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}\,, \qquad -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}\,,$$

$$f(x,\sqrt{32-x^2}) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32-x^2}\,, \qquad -4\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}\,.$$

Sur la première partie du bord (le segment de l'axe x), f atteint son minimum en $x = \frac{3}{2}$ où $f\big(\frac{3}{2},0\big) = -\frac{9}{2}$ et son maximum en $x = -4\sqrt{2}$ où $f\big(-4\sqrt{2},0\big) =$

$8(8+3\sqrt{2})$. L'autre extrémité $x = 4\sqrt{2}$ n'est pas candidat pour le maximum global de f parce que $f(4\sqrt{2}) < f(-4\sqrt{2})$.

Pour la deuxième partie (le demi-cercle), soit $g\colon [-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32 - x^2}.$$

Alors g est dérivable sur : $]-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}[$: , où sa dérivée vaut

$$g'(x) = -6 - \sqrt{32-x^2} + \frac{x(x+6)}{\sqrt{32-x^2}} = \frac{-6\sqrt{32-x^2} - 32 + 2x^2 + 6x}{\sqrt{32-x^2}}\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x - 16 = 3\sqrt{32-x^2} \;\Rightarrow\; (x^2+3x-16)^2 = 9(32-x^2) \\ \Rightarrow\quad x^4 + 6x^3 - 14x^2 - 96x - 32 = 0 \end{aligned}$$

En essayant des diviseurs de 32, on trouve les racines entières $x_1 = 4$ et $x_2 = -4$. On vérifie que seul x_1 est solution de $g'(x) = 0$ (et que les deux autres racines non-entières ne sont pas des solutions de $g'(x) = 0$ (elles apparaissent parce qu'on a pris le carré de l'équation.))

La valeur de g en son point stationnaire est $g(4) = 0$. De plus, les points au bord de l'intervalle de définition de g sont aussi des candidats pour les extremums de g. On a $g(-4\sqrt{2}) = 64 + 24\sqrt{2} \approx 97.9$ et $g(4\sqrt{2}) = 64 - 24\sqrt{2} \approx 30.1$.

Ainsi le minimum global de f est atteint en $(2,2)$ et vaut $f(2,2) = -12$ et le maximum global est atteint en $(-4\sqrt{2}, 0)$ et vaut $f(-4\sqrt{2}, 0) = 8(8+3\sqrt{2})$.

(c) Soit $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ la boule considérée. On commence par chercher les extremums de f à l'intérieur de D. Les points stationnaires de f satisfont

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y + 2 = 0 \\ f_z = 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow\; (x,y,z) = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \quad \text{est le seul point stationnaire}$$

qui est bien à l'intérieur de D car $1^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \le 4$.

Pour trouver les extremums de f sur le bord de D, on définit $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ en sorte que le bord de D est l'ensemble $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$. Notons qu'on a $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y = z = 0$ mais $g(0,0,0) = -4 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ sur le bord de D.

On introduit la fonction de Lagrange

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - \frac{5}{4} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4). \end{aligned}$$

et on résout le système qui décrit les points stationnaires de F, à savoir

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2 - 2\lambda x = 2(1-\lambda)x - 2 & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 2y + 2 - 2\lambda y = 2(1-\lambda)y + 2 & = 0 \qquad (2) \\ F_z = 2z - 1 - 2\lambda z = 2(1-\lambda)z - 1 & = 0 \qquad (3) \\ F_\lambda = -\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right) & = 0 \qquad (4) \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 1$ (sinon (1) à (3) ne sont pas satisfaites), on peut diviser par $1-\lambda$ pour obtenir à partir de (1) à (3)

$$x = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad y = -\frac{1}{1-\lambda}, \qquad z = \frac{1}{2(1-\lambda)}$$

qu'on met ensuite dans (4) qui devient

$$\frac{2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{4(1-\lambda)^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 9 - 16(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 32\lambda + 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + \frac{7}{16} = \left(\lambda - \frac{7}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{7}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}.$$

Ainsi on a

$$x_1 = -\frac{4}{3}, \quad y_1 = \frac{4}{3}, \quad z_1 = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4}{3}, \quad y_2 = -\frac{4}{3}, \quad z_2 = \frac{2}{3}.$$

On calcule la valeur de f aux extremums potentiels sur D

(x,y,z)	$\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$
$f(x,y,z)$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{35}{4}$	$-\frac{13}{4}$

Ainsi le minimum de f sur D est $-\frac{7}{2}$, atteint en $\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$, et le maximum est $\frac{35}{4}$, atteint en $\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Solution 3.

Comme les dérivées partielles de f sont continues sur tout le domaine D, les extremums absolus sont atteints aux points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D. Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$ ne s'annule jamais sur D, la fonction f n'admet aucun point stationnaire.

Puisque le domaine D est un parallélépipède rectangle parallèle aux axes, on peut déterminer le comportement de f sur le bord de D en examinant ses dérivées partielles. Pour $(x,y,z) \in D$ on a :

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = z + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ f est croissante dans la direction x et donc maximale en $x = a$ et minimale en $x = 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ f est décroissante dans la direction y et donc maximale en $y = 0$ et minimale en $y = b$.

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ f est croissante dans la direction z et donc maximale en $z = c$ et minimale en $z = 0$.

La fonction f a donc son maximum absolu en $(a, 0, c)$ et son minimum absolu en $(0, b, 0)$.

Afin de calculer les valeurs extrémales de f, on doit trouver son expression. A partir des dérivées partielles données, on obtient successivement

$$\partial_y f(x,y,z) = -1 \;\Rightarrow\; f(x,y,z) = -y + g(x,z) \;\Rightarrow\; \partial_x f(x,y,z) = \partial_x g(x,z) = z+1$$
$$\Rightarrow \quad g(x,z) = (z+1)x + h(z) \qquad \Rightarrow \qquad \partial_z f(x,y,z) = x + h'(z) = x+2$$
$$\Rightarrow \quad h(z) = 2z + C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad g(x,z) = (z+1)x + 2z + C$$
$$\Rightarrow \quad f(x,y,z) = -y + (z+1)x + 2z + C$$

La condition $f(0,0,0) = 3$ implique alors que $C = 3$ et $f(x,y,z) = (z+1)x - y + 2z + 3$. Ainsi le maximum absolu de f est $f(a,0,c) = a(c+1) + 2c + 3$ et son minimum absolu est $f(0,b,0) = 3 - b$.

Remarque: On aurait aussi pu calculer l'expression de f dès le départ mais l'approche prise ici est plus instructive.

Solution 4.
Le gradient de g est

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 2\cos(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big) + \sin(\theta)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 2\sin(\theta)\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big)$$

Pour trouver les points stationnaires on distingue deux cas :

1) Si $\theta \in \{0, \pi\}$ on a $\sin(\theta) = 0$ et $\cos(\theta) \neq 0$, d'où $\sin(\varphi) = \cos(\varphi)$. Ainsi $\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{cases}$ ce qui mène aux points stationnaires

$$p_1 = (0, \tfrac{\pi}{4}), \quad p_2 = (0, \tfrac{5\pi}{4}), \quad p_3 = (\pi, \tfrac{\pi}{4}), \quad p_4 = (\pi, \tfrac{5\pi}{4}).$$

2) $\theta \in \,]0, \pi[$: Comme $\sin(\theta) \neq 0$ on a $\cos(\varphi) = -\sin(\varphi)$ et donc $\varphi = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases}$. La première équation devient alors

$$4\underbrace{\sin(\varphi)}_{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} + \tan(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \tan(\theta) = \mp 2\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \theta = \begin{cases} \arctan(-2\sqrt{2}) + \pi \\ \arctan(2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Ainsi on a encore trouvé les deux points stationnaires

$$p_5 = \big(\arctan(-2\sqrt{2}) + \pi, \tfrac{3\pi}{4}\big) \quad \text{et} \quad p_6 = \big(\arctan(2\sqrt{2}), \tfrac{7\pi}{4}\big).$$

Pour déterminer la nature de tous les points stationnaires trouvés on calcule la matrice hessienne de g

$$H_g(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big) & 2\cos(\theta)\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big) \\ 2\cos(\theta)\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\big) & 2\sin(\theta)\big(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\big) \end{pmatrix}$$

et son déterminant

$$\begin{aligned}\Lambda_2(\theta,\varphi) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\big(\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\big) + 4\sin(\theta)^2\big(\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\big)^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 4\cos(\theta)^2\big(\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\big)^2 \\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\big(\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\big) + 4\sin(\theta)^2 - 4\cos(\theta)^2 - 8\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,.\end{aligned}$$

Pour tous les points du cas *1)* on a $\Lambda_2(p_i) = -8 < 0$ ($i = 1, \ldots, 4$), ce sont donc des points selle.

Comme

$$\tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2}{1-\sin(x)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x)^2 = \frac{\tan(x)^2}{1+\tan(x)^2}$$

et de manière similaire

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2}\ ,$$

on a pour les points du cas *2)*, p_5 et p_6,

$$\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \cos(\theta) = \mp\frac{1}{3}, \qquad \sin(\varphi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos(\varphi) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Ainsi $\Lambda_2(p_5) = \Lambda_2(p_6) = 8 > 0$ et comme $\Lambda_1(\theta,\varphi) = \cos(\theta) - 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big)$, on a $\Lambda_1(p_{5,6}) = \mp\frac{1}{3} \mp \frac{8}{3} = \mp 3$. La fonction g admet donc un maximum local en p_5 et un minimum local en p_6. Les directions $\mathbb{R}^3$ qui y correspondent sont

$$\boldsymbol{u}_{p_5} = \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{u}_{p_6} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

En comparant avec l'Ex. 6(c) de la Série 9, on voit que le sens du vecteur $\boldsymbol{u}_{p_5}$ qui maximise la pente g est celui du gradient de f au point concerné. Et le sens du vecteur $\boldsymbol{u}_{p_6}$ de pente minimale est celui de $-\nabla f$.

Solution 5.

Soit d la distance entre le point $P = (x, y)$ et la droite $x+y = a$ ($a > 0$). Puisque la distance entre un point et une droite est mesurée dans la direction perpendiculaire à la droite, le point $(x, y) + d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est sur la droite et vérifie donc

$$\left(x + \frac{d}{\sqrt{2}}\right) + \left(y + \frac{d}{\sqrt{2}}\right) = a \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - x - y).$$

Les distances de P aux droites $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement x et y. Par conséquent le produit des distances de P aux trois droites est donnée par la fonction

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, xy(a-x-y), \quad D(f) = \{(x,y) : x, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq a\}.$$

Comme on cherche P à l'intérieur du triangle ABC et que la fonction f admet des dérivées partielles en chaque point de $D(f)$, le maximum cherché est atteint en un point stationnaire de f à l'intérieur du domaine.

On résout donc le système

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ay - 2xy - y^2) = 0 & (1) \\ f_y(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ax - 2xy - x^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

en calculant d'abord $\sqrt{2} \cdot \big((1) - (2)\big)$:

$$x^2 - y^2 - a(x-y) = (x-y)(x+y-a) = 0 \underset{x+y<a}{\Rightarrow} x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

En insérant $x = y$ dans (1), on obtient $ax - 3x^2 = x(a-3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = \frac{1}{3}\,a$ car on cherche un point à l'intérieur de $D(f)$ (i.e. $x > 0$).

Il reste à vérifier que f atteint un maximum au point $\big(\frac{1}{3}\,a, \frac{1}{3}\,a\big)$. Le hessien de f est

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x,y) &= \det\begin{pmatrix} -\sqrt{2}y & \frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x+y) \\ \frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x+y) & -\sqrt{2}x \end{pmatrix} \\ &= 2xy - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x+y)\right)^2 = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 2a(x+y) - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

et donc $\Lambda_2\big(\frac{1}{3}\,a, \frac{1}{3}\,a\big) = \frac{1}{6}\,a^2 > 0$ et $\Lambda_1\big(\frac{1}{3}\,a, \frac{1}{3}\,a\big) = -\frac{\sqrt{2}}{3}\,a < 0\,.$

La fonction f atteint donc son maximum au point $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$ et on a $f\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{54}\,a^3$.

Solution 6.

(a) On cherche les extremums de la fonction-objectif $f(x,y) = x^3 + y^3$ sous la contrainte $g(x,y) = x^4 + y^4 - 32 = 0\,$. Notons que $\nabla g(x,y,z) = (4x^3, 4y^3) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x,y) = 0$ mais que $g(0,0) \neq 0$ et donc $\nabla g(x,y) \neq 0$ pour tout (x,y) satisfaisant $g(x,y) = 0$.

La fonction de Lagrange est

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^3 + y^3 - \lambda(x^4 + y^4 - 32).$$

On cherche les points stationnaires de F qui sont solutions du système

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 - 4\lambda x^3 = x^2(3 - 4\lambda x) & = 0 \qquad (1) \\ F_y = 3y^2 - 4\lambda y^3 = y^2(3 - 4\lambda y) & = 0 \qquad (2) \\ F_\lambda = -(x^4 + y^4 - 32) & = 0 \qquad (3) \end{cases}$$

A partir de (1) et (2) on trouve plusieurs solutions :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;\text{ ou }\; \lambda x = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \;\text{ ou }\; \lambda y = \frac{3}{4}$$

- Si $x = y = 0$, (3) n'est pas satisfaite, donc impossible.

- Si $x=0$, alors (3) implique que $y=\pm\sqrt[4]{32}=\pm 2\sqrt[4]{2}$. Il existe alors une valeur de λ pour satisfaire (2).
- Si $y=0$, alors $x=\pm 2\sqrt[4]{2}$ et (1) peut être satisfaite.
- Si aucune des variables n'est nulle, alors $x=y=\frac{3}{4\lambda}$ par (1) et (2). Par (3) il suit que $2\,\frac{81}{256\,\lambda^4}=32 \quad \Rightarrow \quad x=y=\pm 2$.

Les solutions du système sont donc

$$(x,y)\in\Big\{(0,2\sqrt[4]{2}),(0,-2\sqrt[4]{2}),(2\sqrt[4]{2},0),(-2\sqrt[4]{2},0),(2,2),(-2,-2)\Big\}$$

et on a le tableau suivant

(x,y)	$(0,2\sqrt[4]{2})$	$(0,-2\sqrt[4]{2})$	$(2\sqrt[4]{2},0)$	$(-2\sqrt[4]{2},0)$	$(2,2)$	$(-2,-2)$
$f(x,y)$	$8\cdot 2^{3/4}$	$-8\cdot 2^{3/4}$	$8\cdot 2^{3/4}$	$-8\cdot 2^{3/4}$	16	-16

Comme $2^{3/4}<2$, la valeur maximale de f est 16, atteint en $(2,2)$, et la valeur minimale est -16, atteint en $(-2,-2)$.

(b) On cherche les extremums de f sur l'ensemble $\Gamma := \{(x,y,z) : g_1(x,y,z)=0 \text{ et } g_2(x,y,z)=0\}$ avec $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ et $g_2(x,y,z)=x-y-1$. Pour montrer que $\nabla g_1(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ et $\nabla g_2(x,y,z)=(1,-1,0)$ sont linéairement indépendants sur Γ, supposons que $\alpha\nabla g_1(x,y,z)+\beta\nabla g_2(x,y,z)=0$. Du système

$$\begin{cases} \alpha x+\beta=0\\ \alpha y-\beta=0\\ \alpha z=0 \end{cases}$$

il suit que si $\alpha=0$ alors $\beta=0$. Si $\alpha\neq 0$, alors $z=0$ et la somme des deux premières équations donne $y=-x$. Observons $g_2(x,-x,0)=2x-1=0$ implique $x=\frac{1}{2}=-y$ mais $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)\notin\Gamma$ à cause de g_1. Ainsi ∇g_1 et ∇g_2 sont linéairement indépendants sur Γ.

La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z)-\lambda\, g_1(x,y,z)-\mu\, g_2(x,y,z)\\ &= x+y+z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)-\mu(x-y-1). \end{aligned}$$

et on résout le système $\nabla F=0$:

$$\begin{cases} F_x=1-2\lambda x-\mu &=0 & (1)\\ F_y=1-2\lambda y+\mu &=0 & (2)\\ F_z=1-2\lambda z &=0 & (3)\\ F_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-1) &=0 & (4)\\ F_\mu=-(x-y-1) &=0 & (5) \end{cases}$$

Par (3) on sait que $\lambda\neq 0$ et donc $z=\frac{1}{2\lambda}$. Ensuite

$$(1)+(2) \quad\Rightarrow\quad 2-2\lambda(x+y)=0 \quad\Rightarrow\quad x+y=\frac{1}{\lambda}=2z$$

De plus (5) $\Rightarrow$ $y = x - 1$ et donc $z = x - \frac{1}{2}$. On insère ces expressions dans (4)

$$x^2 + (x-1)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0\,,$$

ce qui donne deux solutions :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

et les solutions du système sont

$$\left\{\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{6}),\, \frac{1}{6}(-3+\sqrt{6}),\, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{6}), \frac{1}{6}(-3-\sqrt{6}), -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

La fonction f admet un maximum en $\left(\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{6}\right), \frac{1}{6}\left(-3+\sqrt{6}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et un minimum en $\left(\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{6}\right), \frac{1}{6}\left(-3-\sqrt{6}\right), -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Solution 7.

On cherche les extremums de $f(x,y,z) = z$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x - 1 = 0$. Notons que $\nabla g(x,y,z) = (8x-4, 6y+2z, 2y+6z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = \left(\frac{1}{2},0,0\right)$ mais $g\left(\frac{1}{2},0,0\right) = -2 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ pour tout (x,y,z) tel que $g(x,y,z) = 0$.

La fonction de Lagrange est

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = z - \lambda(4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x - 1)$$

et il faut résoudre le système

$$\begin{cases} F_x = -\lambda(8x-4) & = 0 & (1) \\ F_y = -\lambda(6y+2z) & = 0 & (2) \\ F_z = 1 - \lambda(2y+6z) & = 0 & (3) \\ F_\lambda = -\left(4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x - 1\right) & = 0 & (4) \end{cases}$$

Observons que $\lambda \neq 0$ à cause de (3). Par (1) on a alors $x = \frac{1}{2}$ et par (2) on a $z = -3y$, qu'on insère dans (3) pour obtenir $y = -\frac{1}{16\lambda}$. Tout cela inséré dans (4) donne

$$1 + \frac{3}{256\lambda^2} - \frac{6}{256\lambda^2} + \frac{27}{256\lambda^2} - 2 - 1 = \frac{24}{256\lambda^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{12}{256}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow \quad y = \mp\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Ainsi les solutions du système sont

$$(x,y,z) \in \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

et les valeurs maximale et minimale de z sont $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; elles sont réalisées aux points $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solution 8.
On note (x_1, y_1) les points sur la première courbe, et (x_2, y_2) les points sur la seconde. On cherche le minimum de la fonction de 4 variables

$$\tilde{f}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \mathrm{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

où, ce qui est équivalent, le minimum du carré de cette fonction (pour enlever les racines)

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

sous les deux contraintes $g_1 = 0$ et $g_2 = 0$ données par

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = y_1 - x_1^2, \qquad g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = y_2 - 2x_2 + 6.$$

On vérifie facilement que les gradients de g_1 et g_2 sont linéairement indépendants. La fonction de Lagrange est

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda_1, \lambda_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \lambda_1(y_1 - x_1^2) - \lambda_2(y_2 - 2x_2 + 6).$$

On calcule

$$\nabla F(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) + 2\lambda_1 x_1 \\ 2(y_1 - y_2) - \lambda_1 \\ -2(x_1 - x_2) + 2\lambda_2 \\ -2(y_1 - y_2) - \lambda_2 \\ x_1^2 - y_1 \\ 2x_2 - 6 - y_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \mathbf{0}.$$

En ajoutant la première et la troisième équation, on trouve $\lambda_2 = -\lambda_1 x_1$, et en ajoutant la deuxième et la quatrième, on a $\lambda_2 = -\lambda_1$. En combinant ces deux équations, on trouve $-\lambda_1 = -\lambda_1 x_1$, ce qui force $\lambda_1 = 0$ ou $x_1 = 1$. Le cas $\lambda_1 = 0$ implique (equations 1 et 2) que $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, donc que les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les mêmes ; c'est impossible (car les deux courbes ne s'intersectent pas !). Ainsi $x_1 = 1$, d'où $y_1 = 1$ (equation 5). L'équation 1 plus 2 fois l'équation 2 donne alors

$$2(1 - x_2) + 4(1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow 2x_2 = 6 - 4y_2.$$

On substitue dans la dernière équation pour trouver $y_2 = 0$ d'où $x_2 = 3$.

Les points les plus proches sont donc $(1, 1) \in C_1$ et $(3, 0) \in C_2$, séparés d'une distance de $\sqrt{5}$.