Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir *vraiment* essayé de le résoudre (plusieurs heures, même parfois plusieurs jours) est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

Solution 1.

(a) Soit $f(x,y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0,y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)\ .$$

Puisque $\partial_x f(x,y) = 3x^2y + 2x$ et $\partial_y f(x,y) = x^3 + 2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0,y_0) = (1,1)$:

$$z = 3 + 5(x-1) + 3(y-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x + 3y - z = 5\ .$$

(b) Soit $F(x,y,z) = xz^2 - 2x^2y + y^2z$. En évaluant F au point $(1,1,z_0)$ on a

$$F(1,1,z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0^2 - 2 + z_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = 1 \ \text{ ou } \ z_0 = -2\,.$$

Selon le cours sur les fonctions implicites, l'équation du plan tangent à la surface $F(x,y,z) = 0$ au point (x_0,y_0,z_0) est

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \cdot \nabla F(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad \text{où} \quad \boldsymbol{r} = (x,y,z) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{r_0} = (x_0,y_0,z_0).$$

On calcule

$$\nabla F = (\partial_x F,\, \partial_y F,\, \partial_z F) = \left(z^2 - 4xy,\, -2x^2 + 2yz,\, 2xz + y^2\right).$$

Ainsi, pour le point $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$, on a $\nabla F(1,1,1) = (-3,0,3)$ et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ -3(x-1) + 0(y-1) + 3(z-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ x - z = 0\,,$$

et pour $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-2)$ on a $\nabla F(1,1,-2) = (0,-6,-3)$ et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ 0(x-1) - 6(y-1) - 3(z+2) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2y + z = 0\,.$$

Solution 2.

(a) Le polynôme de Taylor $p_1(x,y)$ d'ordre 1 de $f(x,y)$ au voisinage de $(1,-2)$ est donné par

$$p_1(x,y) = f(1,-2) + f_x(1,-2)\,(x-1) + f_y(1,-2)\,(y+2).$$

Comme

$$f(x,y) = 3xy + x^2 - y + 5x - 3\,,$$
$$f_x(x,y) = 3y + 2x + 5\,, \qquad f_y(x,y) = 3x - 1\,,$$

on trouve $f(1,-2) = -1$, $\quad f_x(1,-2) = 1$, $\quad f_y(1,-2) = 2$, et donc

$$p_1(x,y) = -1 + (x-1) + 2(y+2) = x + 2y + 2\,.$$

(b) Le polynôme de Taylor $p_2(x,y)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x,y)$ au voisinage de l'origine est donné par

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)\,x^2 + f_{xy}(0,0)\,xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)\,y^2. \end{aligned}$$

Ici on a

$$\begin{aligned} &f(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1\,, \\ &f_x(x,y) = 2xy + 2y - 5\,, \qquad f_y(x,y) = x^2 + 2x + 6y\,, \\ &f_{xx}(x,y) = 2y\,, \qquad f_{xy}(x,y) = 2x + 2\,, \qquad f_{yy}(x,y) = 6\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(0,0) = 1, \quad f_x(0,0) = -5, \quad f_y(0,0) = 0, \\ f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = 2, \quad f_{yy}(0,0) = 6, \end{aligned}$$

et donc

$$p_2(x,y) = 1 + (-5)\cdot x + 0\cdot y + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot x^2 + 2\cdot xy + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot y^2 = 1 - 5x + 2xy + 3y^2.$$

(c) Comme vu en cours, le polynôme de Taylor $p_2(x,y,z)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x,y,z)$ de trois variables autour de l'origine est donné par

$$\begin{aligned} p_2(x,y,z) = {} & f(0,0,0) + f_x(0,0,0)\,x + f_y(0,0,0)\,y + f_z(0,0,0)\,z + \\ & \frac{1}{2} f_{xx}(0,0,0)\,x^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0,0)\,y^2 + \frac{1}{2} f_{zz}(0,0,0)\,z^2 + \\ & f_{xy}(0,0,0)\,xy + f_{xz}(0,0,0)\,xz + f_{yz}(0,0,0)\,yz \end{aligned}$$

Ici on a

$$\begin{aligned} &f(x,y,z) = e^x + y\sinh(z)\,, \\ &f_x(x,y,z) = e^x\,, \qquad f_y(x,y,z) = \sinh(z)\,, \qquad f_z(x,y,z) = y\cosh(z)\,, \\ &f_{xx}(x,y,z) = e^x\,, \qquad f_{yy}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{zz}(x,y,z) = y\sinh(z)\,, \\ &f_{xy}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{xz}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{yz}(x,y,z) = \cosh(z)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(0,0,0) = 1, \quad f_x(0,0,0) = 1, \quad f_y(0,0,0) = 0, \quad f_z(0,0,0) = 0, \\ f_{xx}(0,0,0) = 1, \quad f_{yy}(0,0,0) = 0, \quad f_{zz}(0,0,0) = 0, \\ f_{xy}(0,0,0) = 0 = f_{xz}(0,0,0), \quad f_{yz}(0,0,0) = 1, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} p_2(x,y,z) &= 1 + 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot y^2 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot z^2 + \\ &\quad 0\cdot xy + 0\cdot xz + 1\cdot yz \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + yz. \end{aligned}$$

(d) *Méthode 1*: Les dérivées partielles de la fonction $f(x,y,z)$ sont

$$f_x(x,y,z) = 2z\,e^{2xz+y}, \quad f_y(x,y,z) = e^{2xz+y}, \quad f_z(x,y,z) = 2x\,e^{2xz+y}$$

$$f_{xx}(x,y,z) = 4z^2\,e^{2xz+y}, \quad f_{yy}(x,y,z) = e^{2xz+y}, \qquad f_z(x,y,z) = 4x^2\,e^{2xz+y}$$

$$f_{xy}(x,y,z) = 2z\,e^{2xz+y}, \; f_{xz}(x,y,z) = (2+4xz)\,e^{2xz+y}, \; f_{yz}(x,y,z) = 2x\,e^{2xz+y}$$

et on a

$$\begin{array}{ccc} f_x(0,0,0) = 0, & f_y(0,0,0) = 1, & f_z(0,0,0) = 0 \\ f_{xx}(0,0,0) = 0, & f_{yy}(0,0,0) = 1, & f_z(0,0,0) = 0 \\ f_{xy}(0,0,0) = 0, & f_{xz}(0,0,0) = 2, & f_{yz}(0,0,0) = 0 \end{array}$$

Ainsi le polynôme de Taylor $p_2(x,y,z)$ d'ordre 2 est

$$p_2(x,y,z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz\,.$$

Méthode 2: On a $f(x,y,z) = g(h(x,y,z))$ avec $g(u) = e^u$ et $h(x,y,z) = 2xz + y$. Puisque $h(0,0,0) = 0$, on doit utiliser le développement limité (DL) de g en $u = 0$, c'est-à-dire

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\tilde{\varepsilon}(u),$$

avec $\lim_{u\to 0}\tilde{\varepsilon}(u) = 0$. On remplace $u = 2xz + y$:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 1 + 2xz + y + \frac{(2xz+y)^2}{2} + (2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + 2x^2z^2 + 2xyz + (2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + d^2\varepsilon(x,y,z)\,, \end{aligned}$$

avec $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et

$$\varepsilon(x,y,z) = \frac{2x^2z^2 + 2xyz + (2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Les termes $2x^2z^2$ et $2xyz$ on été mis dans le reste car ils sont d'ordre supérieur à 2 (4 et 3 dans ce cas). On vérifie que $\lim_{(x,y,z)\to 0}\varepsilon(x,y,z) = 0$. En utilisant les coordonnées sphériques on vérifie facilement que

$$\lim_{(x,y,z)\to 0}\frac{2x^2z^2}{x^2+y^2+z^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y,z)\to 0}\frac{2xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

et $|(2xz+y)^2/(x^2+y^2+z^2)| < C$ pour tout (x,y,z), avec $C > 0$ une constante. Il s'ensuit

$$\lim_{(x,y,z)\to 0}\left|\frac{(2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y)}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \lim_{(x,y,z)\to 0} C|\tilde{\varepsilon}(2xz+y)| = 0,$$

vu que $\lim_{u\to 0}\tilde{\varepsilon}(u) = 0$. On a donc bien trouvé $\lim_{(x,y,z)\to 0}\varepsilon(x,y,z) = 0$ et donc

$$p_2(x,y,z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz\,.$$

(e) On a $\cos(x)^{\sin(y)} = \exp(\sin(y)\log(\cos(x)))$. On va utiliser les développements limités suivants (tous en 0):

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$
- $\log(1+x) = x + x\varepsilon(x)$
- $\sin(y) = y + y\varepsilon(y)$
- $\exp(x) = 1 + x + x\varepsilon(x)$

On calcule:

$$\begin{aligned}\log(\cos(x)) &= \log\left(1 + \left[-\tfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]\right)\\ &= \left[-\tfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right] + \left[-\tfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]\varepsilon\left(\left[-\tfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]\right)\\ &= -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\end{aligned}$$

(tous les termes sauf $-\frac{x^2}{2}$ ont été mis dans le nouveau reste $x^2\varepsilon(x)$, cf Analyse I). Ainsi

$$\begin{aligned}\exp(\sin(y)\log(\cos(x))) &= \exp\left((y + y\varepsilon(y))\left(-\tfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\right)\\ &= \exp(-\tfrac{x^2y}{2} + x^2y\underbrace{(\varepsilon(x) - \tfrac{1}{2}\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(y))}_{=\varepsilon(x,y)})\\ &= 1 - \frac{x^2y}{2} + x^2y\varepsilon(x,y) + (\cdots)\varepsilon(\cdots),\end{aligned}$$

où $(\cdots) = -\frac{x^2y}{2} + x^2y\varepsilon(x,y)$. On voir alors que le reste est de la forme $x^2y\varepsilon(x,y)$ pour une (nouvelle) fonction $\varepsilon(x,y)$ qui tend vers 0 lorsque $(x,y) \to (0,0)$. En passant en coordonnées polaires, on remarque que $\frac{|x^2y|}{\|(x,y)\|^3} = |\cos^2\varphi\sin\varphi| \leq 1$, d'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2y|\varepsilon(x,y)}{\|(x,y)\|^3} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0.$$

En d'autres termes, on a montré que

$$\cos(x)^{\sin(y)} = 1 - \frac{x^2y}{2} + \|(x,y)\|^3\varepsilon(x,y)$$

pour un (nouvel) $\varepsilon(x,y)$ qui tend vers 0 lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Ainsi

$$p_3(x,y) = 1 - \frac{x^2y}{2}.$$

(f) On change les coordonneés $u = x - x_0 = x - 2$, et $v = y - y_0 = y + 1$; on doit alors trouver le polynôme de Taylor d'ordre 5 de

$$f(x,y) = \log(x+y) = \log((u+2) + (v-1)) = \log(1+u+v)$$

autour de $(u_0, v_0) = (0,0)$. On utilise un DL_5 de $\log(1+t)$ en $t = 0$ pour trouver

$$\log(1+u+v) = (u+v) - \tfrac{(u+v)^2}{2} + \tfrac{(u+v)^3}{3} - \tfrac{(u+v)^4}{4} + \tfrac{(u+v)^5}{5} + |u+v|^5\varepsilon(u+v).$$

Un passage en coordonnées polaires $(u, v) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ montre que

$$\frac{|u+v|^5}{\|(u,v)\|^5} \leq |\cos\varphi + \sin\varphi|^5 \leq 2^5$$

et on a donc

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{|u+v|^5\varepsilon(u+v)}{\|(u,v)\|^5} \leq 2^5 \lim_{(u,v)\to(0,0)} \varepsilon(u+v) = 0.$$

Le reste est donc de la forme $\|(u,v)\|^5\varepsilon(u,v)$ pour un (nouvel) $\varepsilon(u,v)$ qui tend vers 0 lorsque $(u,v) \to (0,0)$. On a donc trouvé le DL_5 de $\log(1+u+v)$ en $(u_0, v_0) = (0,0)$, et on le réécrit avec les variables x, y pour trouver le DL_5 de $\log(x+y)$ en $(x_0, y_0) = (2, -1)$:

$$\begin{aligned}\log(x+y) = ((x-2)+(y+1)) &- \tfrac{((x-2)+(y+1))^2}{2} + \tfrac{((x-2)+(y+1))^3}{3} \\ &- \tfrac{((x-2)+(y+1))^4}{4} + \tfrac{((x-2)+(y+1))^5}{5} \\ &+ |(x-2)+(y+1)|^5\varepsilon((x-2)+(y+1)).\end{aligned}$$

Ainsi

$$p_5(x,y) = x + y - 1 - \tfrac{(x+y-1)^2}{2} + \tfrac{(x+y-1)^3}{3} - \tfrac{(x+y-1)^4}{4} + \tfrac{(x+y-1)^5}{5}.$$

Solution 3.

(a) On utilise le DL de f pour trouver

$$\begin{aligned} g(t) = f(tx, ty) &= p_N(tx, ty) + \|(tx, ty)\|^N\varepsilon(tx, ty) \\ &= p_N(tx, ty) + |t|^N\Big(\|(x,y)\|\varepsilon(tx, ty)\Big).\end{aligned}$$

Pour (x, y) fixé, $p_N(tx, ty)$ est un polynome en t de degré $\leq N$. De plus, on a

$$\lim_{t\to 0}\Big(\|(x,y)\|\varepsilon(tx,ty)\Big) = \|(x,y)\| \lim_{t\to 0}\varepsilon(tx,ty) = 0$$

car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$. Ainsi, on a montré que

$$g(t) = p_N(tx, ty) + |t|^N\varepsilon(t)$$

pour un (nouvel) $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0 lorsque $t \to 0$. C'est donc le DL d'ordre N de $g(t)$ en $t_0 = 0$.

(b) Le DL de $g(t)$ est aussi donné par la formule de Taylor. On a donc

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k = p_N(tx, ty).$$

On applique cela en $t = 1$ pour trouver

$$p_N(x,y) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \cdots + \frac{1}{N!}g^{(N)}(0).$$

Solution 4.
Il suffit de montrer que la norme $\|f(t)\|$ est une fonction constante de t (car alors $f(t)$ est sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $R = \|f(t)\|$). De manière équivalente, il faut montrer que la *norme au carré* $\|f(t)\|^2$ est une fonction constante de t, où encore mieux, que la dérivée de la norme au carré est nulle:

$$\frac{d}{dt}\left(\|f(t)\|^2\right) = 0.$$

On peut voir cela de (au moins !) deux façons différentes:

1. On pose $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, et on a

$$\|f(t)\|^2 = f_1(t)^2 + f_2(t)^2$$

d'où, en dérivant,

$$\frac{d}{dt}\left(\|f(t)\|^2\right) = 2f_1(t)f_1'(t) + 2f_2(t)f_2'(t) = 2\langle f(t), f'(t)\rangle = 0$$

car les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

2. La fonction $t \mapsto \|f(t)\|^2$ est la composée $h \circ f$ où h est la fonction

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto h(x,y) = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

La dérivée (= matrice jacobienne de h) est

$$h'(x,y) = \nabla h(x,y)^T = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}^T = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$$

et donc, en utilisant la règle des composées

$$\frac{d}{dt}\left(\|f(t)\|^2\right) = h'(f(t)) \cdot f'(t) = 2\left(f(t)\right)^T \cdot f'(t) = 2\langle f(t), f'(t)\rangle = 0.$$

Solution 5.
On montre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a). De plus, comme M est symétrique, on remarque que $b = c$.

Pour $\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$, soit λ une valeur propre, avec $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ son vecteur propre associé. Comme M est définie positive, $\langle \boldsymbol{v}, M\boldsymbol{v}\rangle > 0$ par hypothèse. On calcule

$$\langle \boldsymbol{v}, M\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \lambda\|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Comma $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, le terme $\|\boldsymbol{v}\|^2$ est > 0, et on peut le simplifier pour trouver

$$\lambda\|\boldsymbol{v}\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0.$$

Pour $\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(c)}}$, soient $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ les valeurs propres. On utilise les relations d'algèbre linéaire

$$\det(M) = \lambda_1\lambda_2 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

On a $\Lambda_2 = \det(M) = \lambda_1\lambda_2 > 0$ car λ_1 et λ_2 sont > 0. Donc, comme $\det(M) = ad - b^2$, on trouve $ad - b^2 > 0 \Rightarrow ad > b^2 \geq 0$, et donc $ad > 0$. Cela implique que a et d ont le même signe: soit tous les deux > 0, soit < 0. Mais comme $\mathrm{tr}(M) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, les deux ne peuvent pas être négatifs. Donc a et d sont > 0, d'où $\Lambda_1 = a > 0$.

Finalement, pour $\boxed{\text{(c)} \Rightarrow \text{(a)}}$, si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a

$$\langle \boldsymbol{v}, M\boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \end{pmatrix} \right\rangle = ax^2 + 2bxy + dy^2.$$

Comme $\Lambda_1 = a > 0$ et $\Lambda_2 = \det(M) = ad - b^2 > 0$, on a

$$ad > b^2 \quad \Rightarrow \quad d > \frac{b^2}{a}.$$

Ainsi, si $y \neq 0$, on a $dy^2 > \frac{b^2}{a} y^2$, d'où

$$\langle \boldsymbol{v}, M\boldsymbol{v} \rangle > ax^2 + 2bxy + \frac{b^2}{a} y^2 = \frac{a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2}{a} = \frac{(ax + by)^2}{a} \geq 0,$$

et donc $\langle \boldsymbol{v}, M\boldsymbol{v} \rangle > 0$. Et si $y = 0$, alors $x \neq 0$ (car $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) et on a

$$\langle \boldsymbol{v}, M\boldsymbol{v} \rangle = ax^2 > 0.$$

Solution 6.
Pour les cas (a) – (d) on peut utiliser la matrice hessienne H en $(0, 0)$ qui est diagonale. (On peut aussi s'en passer et utiliser les mêmes arguments que pour (e) – (h)).On a:

(a) $\det H = 2^2 > 0$ et $H_{11} = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ le point $(0, 0)$ est un minimum (en fait global) ;

(b) $\det H = 2 \cdot (-2) < 0 \;\Rightarrow\;$ il s'agit d'un point selle ;

(c) $\det H = (-2) \cdot 2 < 0 \;\Rightarrow\;$ il s'agit d'un point selle ;

(d) $\det H = (-2)^2 > 0$ et $H_{11} = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ le point $(0, 0)$ est un maximum (en fait global).

Pour les cas (e) – (h) on doit utiliser un autre argument (car la matrice hessienne est nulle). Noter que cet argument marche aussi pour les cas (a) – (d).

(e) Comme $f(x, y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, le point $(0, 0)$ est le minimum global.

(f) Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 > 0 = f(0, 0) > f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^4$, donc $(0, 0)$ est un point selle.

(g) Aussi un point selle: $f(\varepsilon, 0) = -\varepsilon^4 < 0 = f(0, 0) < f(0, \varepsilon) = \varepsilon^4$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(h) $f(x, y) = -(x^4 + y^4) < 0$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, donc $(0, 0)$ est le maximum global de f.