Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Notes de cours

Analyse I

Olivier Mila

Version provisoire du 11 décembre 2024
Toutes informations non-garanties

Automne 2024

Chapitre 0: Prélude

0.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets (mathématiques). Exemples:

1) $A = \{1, 2, 3\}$. Ensemble contenant les nombres un, deux et trois.
2) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ensemble des **nombres naturels**.
3) $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ensemble des **entiers relatifs**.
4) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ensembles des **nombres rationnels**, des **nombres réels**, et des **nombres complexes** (revus plus tard).
5) **Intervalles** (revus plus tard) Ex: $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ = nombres réels compris entre 2 et 5 (inclus), $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$.
6) $B = \{2, 4, 6, \dots\}$. Ensembles des nombres pairs positifs.

Notations:

- $x \in X$ signifie x **est élément de** X. Ex: $2 \in A$, $-1 \in \mathbb{Z}$, $-4 \notin B$.
- $X \subset Y$, ou $X \subseteq Y$, signifie X **est sous-ensemble de** Y. Ex: $A \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \not\subseteq B$.
- $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$, ou $X - Y$, signifie X **privé de** Y. Ex: $A \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$.
- $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ est le **produit cartésien** de X et Y; c'est l'ensemble des **paires/couples** (x, y). Ex: Si $C = \{1, 2\}, D = \{3, 4\}$, on a $C \times D = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$. (Attention: $(x, y) \neq (y, x)$. Donc $(3, 1) \notin C \times D$).

0.2 Fonctions

Une **fonction** est une manière d'assigner des éléments $y \in Y$ à des $x \in X$. Ex: $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 8, 12\}$ et f assigne $2 \mapsto 1, 3 \mapsto 8, 4 \mapsto 8$. Attention: Pas plus d'une flèche partant du même x.

Si $x \mapsto y$, on note $y = f(x)$ (y est l'**image** de x via f). Le **domaine** $D(f) \subseteq X$ est

$$\mathrm{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ une flèche part de } x\} = \{x \in X \mid f(x) \text{ est défini}\}.$$

L'**ensemble image** $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$ est

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y \mid \text{ une flèche arrive vers } y\} = \{f(x) \mid x \in \mathrm{D}(f)\}.$$

La notation $\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$ veut dire $\mathrm{D}(f) = A$ et $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$. $f(x) = \dots (\textit{formule}) \dots$ sous-entend $\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$ avec $D = \mathrm{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$ le plus grand possible.

Exemples:

(i) $f(x) = x + 1$ veut dire $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$.

(ii) $g(x) = \frac{1}{x}$ veut dire $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$.

(iii) Si $g\colon \{1,2,3\} \to \{2,3,4\}$ est tel que $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4$, alors g est comme f, mais avec des ensembles de départ et d'arrivée plus petits: $g = f|_{\{1,2,3\}}^{\{2,3,4\}}$ (**restriction** de f à $\{1,2,3\}$ et **corestriction** de f à $\{2,3,4\}$).

0.3 Surjectivité et Injectivité

Définition. Une fonction $f\colon X \to Y$ est

- **surjective** si $\mathrm{Im}(f) = Y$ (tout $y \in Y$ est l'image d'*au moins* un $x \in X$),
- **injective** si $f(x_1) = f(x_2) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{implique}} x_1 = x_2$, i.e. dès que $f(x_1) = f(x_2)$, on a forcément $x_1 = x_2$ (tout $y \in Y$ est l'image d'*au plus* un $x \in X$),
- **bijective** si inj. + surjective (tout $y \in Y$ est l'image d'*exactement* un $x \in X$).

Si $f\colon X \to Y$ est bijective (et seulement dans ce cas!), on peut l'"inverser":

Définition. Si $f\colon X \to Y$ est bijective, sa **fonction réciproque** est

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon Y &\to X \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \text{unique } x \in X \text{ tel que } f(x) = y. \end{aligned}$$

Exemples:

(i) Exemple visuel (vu en classe).

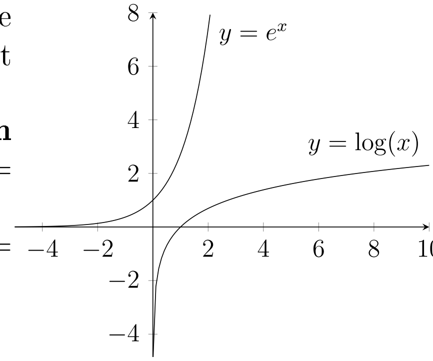
(ii) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$ est bijective de réciproque $f^{-1}(x) = x - 1$ (détails vus en classe).

(iii) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$. Pas surjective: $-3 \notin \mathbb{R} = Y$, car un carré est toujours positif. On la corestreint à $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty[$: $g =$. La fonction $f|^{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ est surjective, mais pas injective: $g(2) = 4 = g(-2)$, alors que $2 \neq -2$. On la restreint à $\mathbb{R}_{\geq 0}$. La fonction $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}^{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \begin{aligned} h\colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ est bijective, de réciproque $\begin{aligned} h^{-1}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$ (détails et graphes vus en classe).

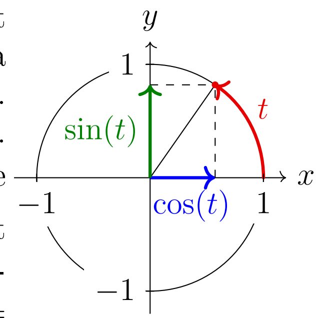
0.4 Autres exemples de fonctions

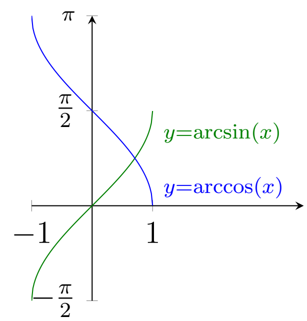
(i) Polynômes: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$; les $a_i \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients**, et n est le **degré** (si $a_n \neq 0$). Ex: $f(x) = x^3 + 2x - 1, f(x) = x^7, \ldots$.
Si n est *impair*, $f(x) = x^n$ est bijective, et si n est *pair*, on doit co/restreindre à $h = f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}$. Dans les deux cas la réciproque est notée $\sqrt[n]{x}$. Si $x \geq 0$, on peut utiliser la notation $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

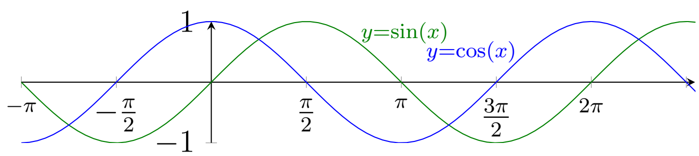
(ii) Exponentielles: Pour chaque **base** $a > 0$, on a l'**exponentielle en base** a, notée $\begin{aligned} f = \exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp_a(x) = a^x \end{aligned}$. Si $a \neq 1$, $f|^{\mathbb{R}_{>0}}$ est bijective ; sa réciproque est le **logarithme en base** a, noté $\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a(x) \end{aligned}$. Si $a = e = 2,718... =$ **nombre d'Euler**, on note $\log_e(x) = \ln(x) = \log(x)$.

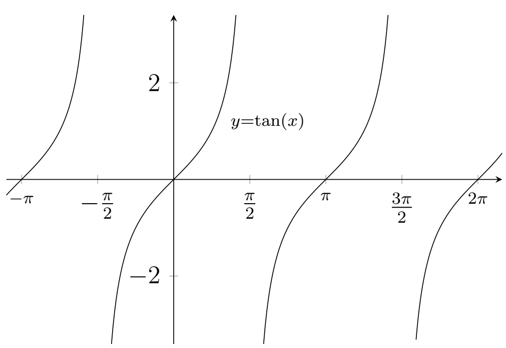


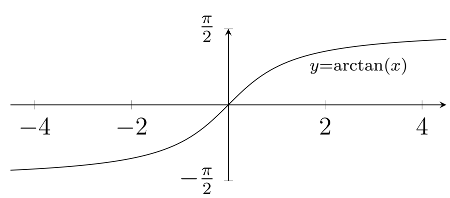
(iii) Fonctions trigonométriques: le **sinus** $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le **cosinus** $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définis à l'aide de la fissure ci-contre. On a $\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \ldots$. $\mathrm{D}(\sin) = \mathrm{D}(\cos) = \mathbb{R}$, et $\mathrm{Im}(\sin) = \mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1]$. La co/restriction $\sin|^{[-1,1]}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est bijective, de réciproque $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La co/restriction $\cos|^{[-1,1]}_{[0,\pi]}$ est bijective, de réciproque $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$. La **tangente** est définie comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On a $\mathrm{D}(\tan) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{Im}(\tan) = \mathbb{R}$. La restriction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est bijective, de réciproque $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Graphes:











Définition. La **composée** (ou **composition**) de deux fonctions $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ est la fonction

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\to C \\ a &\mapsto g \circ f(a) = g(f(a)). \end{aligned}$$

Ex: $\sin(x^2) = g \circ f(x) = g(f(x))$ avec $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x). \end{aligned}$

On remarque que si $f\colon A \to B$ est bijective, alors $g\colon B \to A$ est sa réciproque si et seulement si $g \circ f(x) = x$ et $f \circ g(x) = x$.

Chapitre 1: Nombres

1.1 Entiers et nombres rationnels

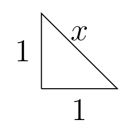
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = nombres/entiers naturels. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$ = entiers relatifs.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ = nombres rationnels. (Peut être identifié à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ via "$\frac{a}{b} = (a, b)$", mais où l'on déclare $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$)

Malgré la quantité impressionnante de nombres dans $\mathbb{Q}$, on a malheureusement:

Proposition 1.1. *L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{Q}$.*

Preuve. Par l'absurde. Supposons qu'il existe une solution $x = \frac{a}{b}$. On peut supposer que soit a, soit b est impair (sinon on peut simplifier la fraction). Alors $x^2 = 2 \Rightarrow (\frac{a}{b})^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ est pair. Si a était impair, on aurait $a = 2k + 1$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, et donc $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1$ serait aussi impair. Donc a est forcément pair $\Rightarrow a = 2c$. Il suit $a^2 = (2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair (cf même argument que pour a). Donc a et b sont tous les deux pairs: c'est absurde ! (On avait supposé que l'un ou l'autre était impair). Il ne peut donc exister de solution $x \in \mathbb{Q}$. $\square$

Remarque 1.1. Cela dit, en observant le triangle ci-contre, on s'aperçoit que le côté x est tel que $x^2 = 2$! Il nous manque donc des nombres...



1.2 Construction des nombres réels

Idée (de génie): utiliser la relation d'ordre $x \leq y$ sur $\mathbb{Q}$ pour "ajouter" des nombres aux bons endroits.

Définition 1.1. Soit $A \subseteq \mathbb{Q}$ un ensemble non-vide ($A \neq \varnothing$).

- Un $\begin{array}{c}\textbf{majorant}\\ \textbf{minorant}\end{array}$ de l'ensemble A est un $x \in \mathbb{Q}$ tel que $\begin{array}{c}x \geq a\\ x \leq a\end{array}$ pour tout $a \in A$.
- S'il existe un $\begin{array}{c}\text{majorant}\\ \text{minorant}\end{array}$ x de A tel que $x \in A$, alors x est unique et s'appelle le $\begin{array}{c}\textbf{maximum}\\ \textbf{minimum}\end{array}$ de A.
- L'ensemble A est $\begin{array}{c}\textbf{majoré}\\ \textbf{minoré}\\ \textbf{borné}\end{array}$ s'il admet $\begin{array}{c}\text{un majorant}\\ \text{un minorant}\\ \text{les deux}\end{array}$.

Exemples:

- Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, alors A admet $\mathbf{1}, 2, \frac{3}{2}, \dots$ comme majorants et $\mathbf{0}, -3, -\frac{1}{2}$ comme minorants. Il est donc borné, et on a $\max A = 1$ et $\min A = 0$.

- $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ admet les mêmes majorants et minorants que A, et est donc borné. En revanche, $\max B$ et $\min B$ n'existent pas (B n'a pas de majorant/minorant dans B).
- $C = \mathbb{N}$ possède 0 comme minorant, mais pas de majorants. Il n'est donc pas majoré (et pas borné). $\max C$ n'existe pas, et $\min C = 0$.

Moralement, B devrait avoir comme "maximum" 1 et "minimum" 0. Cela motive:

Définition 1.2. Soit $A \subseteq \mathbb{Q}$ un ensemble non-vide.
- Le **suprémum** de A est $\sup A = \min(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ est un majorant de } A\})$.
C'est le plus petit des majorants.
- L'**infimum** de A est $\inf A = \max(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ est un minorant de } A\})$.
C'est le plus grand des minorants.

Remarque 1.2. Si A n'est pas $\begin{matrix}\text{majoré}\\ \text{minoré}\end{matrix}$, alors on pose $\begin{matrix}\sup A = +\infty\\ \inf A = -\infty\end{matrix}$. (Attention: ce sont des symboles $\pm\infty$, pas des nombres). De plus, si $\begin{matrix}\max A\\ \min A\end{matrix}$ existe, alors $\begin{matrix}\sup A = \max A\\ \inf A = \min A\end{matrix}$.

Reprenons les exemples précédents:
- $\sup A = \max A = 1$, et $\inf A = \min A = 0$.
- $\sup B = 1$ même si $\max B$ n'existe pas, et $\inf B = 0$ même si $\min B$ n'existe pas.
- $\inf C = \min C = 0$ et $\sup C = +\infty$ (il n'y a pas de majorant).

Remarque 1.3. Pour un ensemble borné, si min, max peuvent ne pas exister, on s'attend à ce que inf et sup existent toujours.

Contre-exemple fondamental: $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. L'ensemble D est borné (majoré par $\frac{3}{2}$, car $x^2 \leq 2 \leq \frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$, et minoré par $-\frac{3}{2}$). En revanche, on a:

Proposition 1.2. *Si $x = \sup D$ existe, alors $x^2 = 2$.*

Preuve. 1) Supposons par l'absurde que $x^2 < 2$. On choisit un entier $n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$ et on pose $d = x + \frac{1}{n}$. Alors $d \in D$: en effet, $d \in \mathbb{Q}$ et $d^2 = (x + \frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2$ (puisque $x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{n} \leq 2 - x^2 \Leftrightarrow n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$). Donc $d \in D$ et $d = x + \frac{1}{n} > x$. C'est absurde, car x est un majorant de D.
2) Supposons par l'absurde que $x^2 > 2$. Alors ... (exercice difficile !) ... Absurde !
3) Comme on n'a ni $x^2 < 2$, ni $x^2 > 2$, on a $x^2 = 2$. □

Corollaire 1.3. $\sup D$ *n'existe pas dans* $\mathbb{Q}$.

Preuve. Il n'y a pas de $x \in \mathbb{Q}$ avec $x^2 = 2$, cf Prop. 1.1. □

Cette procédure nous indique où ajouter des nombres !
<u>*Construction des nombres réels*</u>: $\mathbb{R}$ s'obtient à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant les sup et les inf de tous les sous-ensembles bornés $A \subseteq \mathbb{Q}$. (Voir règle de coupure de Dedekind).

1.3 Propriétés des nombres réels

(i) $\mathbb{R}$ est un **corps** (on a $0, 1, +, \cdot$, inverses, distributivité,...) muni d'un **ordre total** ($x \leq y$).

(ii) Les définitions de majoré, minoré, max, min, suprémum, infimum restent les mêmes que pour $\mathbb{Q}$ (remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ dans les définitions).

(iii) La procédure de la construction de $\mathbb{R}$ a réussi. En effet, on a:

Théorème 1.4. *Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide et $\begin{array}{c}\textit{majoré}\\ \textit{minoré}\end{array}$, $\begin{array}{c}\sup A\\ \inf A\end{array}$ existe toujours $\in \mathbb{R}$ et est unique.*

En fait, si $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$, alors $\sup D$ et $\inf D$ existent, et sont solutions de $x^2 = 2$. Donc $\sup D = \sqrt{2}$ et $\inf D = -\sqrt{2}$.

(iv) Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné, $\begin{array}{c}\max A\\ \min A\end{array}$ existe si et seulement si $\begin{array}{c}\sup A \in A\\ \inf A \in A\end{array}$ et dans ce cas, $\begin{array}{c}\max A = \sup A\\ \min A = \inf A\end{array}$.

Exemples de calcul de de sup / inf:

1) $A = \{3 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. A est majoré par 3 et minoré par 4, donc borné. Comme $4 \in A$, on a $\sup A = \max A = 4$. On va montrer que $\inf A = 3$. C'est bien un minorant, mais est-ce le plus grand ? On va montrer qu'aucun $x > 3$ ne peut être un minorant, en construisant un $a \in A$ tel que $a < x$. Soit $x > 3$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{x-3}$, et on pose $a = 3 + \frac{1}{n}$. Alors $a \in A$ et $a = 3 + \frac{1}{n} < x$, puisque $3 + \frac{1}{n} < x \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x - 3 \Leftrightarrow n > \frac{1}{x-3}$. Ainsi x n'est pas un minorant, et 3 est donc le plus petit ; c'est $\inf A$. Comme $3 \notin A$, $\min A$ n'existe pas.

2) **Intervalles**:

$$
\begin{array}{llll}
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a & \leq x & \leq b\} \\
]a,b[= & < & < \\
[a,b[= & \leq & < \\
]a,b] = & < & \leq \\
\hline\hline
\multicolumn{4}{c}{\text{bornés, } \inf = a, \ \sup = b}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll|c}
[a,+\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a & \leq x\} & \inf = a \\
]a,+\infty[\ = & < & \sup = +\infty \\
\hline
]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x & \leq b\} & \inf = -\infty \\
]-\infty,b[\ = & < & \sup = b \\
\hline\hline
\multicolumn{3}{c}{\text{non-bornés}}
\end{array}
$$

1.4 Représentation décimale

Tout $x \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$x = \pm \underbrace{d_1 d_2 \dots d_n}_{\substack{\text{décimales avant la virgule,}\\ \text{en nombre fini}}} \underbrace{.}_{\text{ou ,}} \underbrace{d_{n+1} d_{n+2} \dots}_{\substack{\text{décimales après la virgule,}\\ \text{en nombre fini ou infini}}} \qquad \text{avec } d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Exemple: Représentation finie: $1 = 1.0 = 1.000\dots$, $\frac{3}{2} = 1.5$, $\frac{110}{8} = 13.75$. Représentation périodique: $\frac{5}{7} = 0.\overline{714285} = 0.7142857142857\dots$. Mais: $\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$ semble ne pas se répéter...

Théorème 1.5. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ a une représentation décimale finie ou périodique.*

Idée de preuve. $\boxed{\Rightarrow}$ Vu en classe. $\boxed{\Leftarrow}$ Exemple représentation finie: $x = 3.745 = \frac{3745}{1000}$.
Ex. représ. périodique: $x = 41.70\overline{102} \Rightarrow 10^2 x = 4170.\overline{102} \Rightarrow 10^2 10^3 \cdot x = 4170102.\overline{102}$.
Donc $10^2 10^3 x - 10^2 x = 4170102 - 4170 = y \in \mathbb{Z}$, d'où $x = \frac{y}{10^2(10^3-1)} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Avec la même idée, on montre que $0.\overline{9} = 1$. Conséquences du théorème:

- La représentation décimale de $\sqrt{2}$ est infinie non-périodique.
- $x = 0,1\,01\,001\,0001\,00001\,\ldots \notin \mathbb{Q}$.
- **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$** : Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $x < a < y$ (explications vues en classe).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists a \in \mathbb{Q}$ arbitrairement proche de x. Ex: $x = \sqrt{2} = 1.414235\ldots \Rightarrow$ $1; 1.4; 1.41; 1.414; \ldots$ sont $\in \mathbb{Q}$ et s'approchent de $\sqrt{2}$.

Autres propriétés des nombres (réels):

(i) Récapitulatif: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Les nombres **irrationnels** sont: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ii) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est **dénombrable**: on peut lister ses éléments. (Mathématiquement, dénombrable veut dire qu'il existe une fonction bijective $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$). Idée de preuve vue en classe.

(iii) L'ensemble $\mathbb{R}$ est **indénombrable** ($\Leftrightarrow$ il n'existe pas de liste de $\mathbb{R}$).

Preuve. Par l'absurde. Supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Alors $]0,1[$ l'est aussi ; il existe donc une liste de tous ses éléments: voir ci-contre. On choisit $b_1 \neq d_1$, $b_2 \neq d_2, \ldots, b_n \neq d_n, \ldots$ et on pose $y = 0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$. Alors $y \in\,]0,1[$, mais y n'est pas dans cette liste (pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, x_n et y_n diffèrent en leur n-ième décimale). Cette liste est donc incomplète ; absurde. $\square$

$$\begin{array}{l}
x_1 = 0,d_1_\,_\,_\,_\,_\\
x_2 = 0,_\,d_2_\,_\,_\,_\\
x_3 = 0,_\,_\,d_3_\,_\,_\\
\vdots \qquad\qquad \ddots\\
x_n = 0,_\,_\,_\,_\,_\,_\,d_n_\\
\vdots
\end{array}$$

(iv) La **valeur absolue** d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad = \quad \text{distance entre 0 et } x.$$

Propriétés: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, |-x| = |x|$, $|x| \geq 0$, $|xy| = |x||y|$, $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

1.5 Nombres complexes

Il y a beaucoup de nombres dans $\mathbb{R}$, on a par exemple une solution de $x^2 = a$ pour tout $a \geq 0$. Mais pas de solutions à $x^2 = -1$ (Si $x \in \mathbb{R}$, alors x^2 est toujours positif). Faut-il rajouter des nombres ? Débatable, mais en rétrospective: SUPER IDÉE !

Construction: On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$:

1) D'une addition: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$. Interprétation géométrique: c'est l'addition des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
2) D'une multiplication: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$. Interprétation géométrique: plus tard ! Ex: $(1,2) \cdot (3,4) = (-5, 10)$.

Fait important: Cela fait de $\mathbb{R}^2$ un **corps** (on a $+, \cdot, 0 = (0,0), 1 = (1,0)$, des inverses, la distributivité,...)

Notations:

(i) $(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$ et $(a,0)\cdot(b,0) = (ab,0)$. Cela fait donc sens d'**identifier** $\boldsymbol{\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}}$ **avec** $\mathbb{R}$ **(via** $\boldsymbol{(x,0) \leftrightarrow x}$**)**.

(ii) De plus $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + b \cdot (0,1)$. Le "nombre" $(0,1)$ est intéressant: on a $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$. On l'appelle **l'unité imaginaire** $i = (0,1)$.

Ainsi i est solution de $x^2 = -1$, et on peut écrire $(a,b) = a + b(0,1) = a + bi$.

Définition 1.3. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations $+$ et $\cdot$ est le **corps des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$.

Remarque 1.4.
- Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a+bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. C'est la **forme cartésienne** de z.
- On peut "oublier" la définition compliquée de $\cdot$, et retenir seulement $i^2 = -1$. En effet: $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ad - bc + (ad+bc)i$; on retrouve la multiplication définie plus haut.

Représentation graphique: Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on renomme l'axe horizontal "axe réel $\mathbb{R}$" et l'axe vertical "axe imaginaire" $i\mathbb{R}$. Les nombres complexes sont donc représentés comme des points de $\mathbb{R}^2$ (détails vus en classe).

Définition 1.4. Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1) La **partie réelle** de z est $\mathrm{Re}(z) = a$. La **partie imaginaire** de z est $\mathrm{Im}(z) = b$.
2) Le **module** (ou valeur absolue) de z est $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in [0, +\infty[$. C'est la distance entre z et 0 (comme pour $|x|$ dans $\mathbb{R}$).
3) L'**argument** de z est $\arg(z) =$ angle entre z et l'axe réel, mesuré $\in]-\pi, \pi]$. Pour $a, b > 0$, on a $\arg(z) = \arctan(b/a)$, et il existe des formules dans les autres cas.
4) Le **conjugué complexe** de z est $\bar{z} = a - bi$,

1.6 Propriétés des nombres complexes

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. En effet, si $z = a+bi$, alors $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+bi+a-bi}{2} = \frac{2a}{2} = a$, et de manière analogue $\frac{z-\bar{z}}{2i} = b$.

(ii) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$. (Preuve: Exercices).

(iii) $|z|^2 = z\bar{z}$. En effet, $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2+b^2 = |z|^2$. Conséquence: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. En effet, $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$, et on obtient l'égalité voulue en prenant la racine.

(iv) **Proposition 1.6** (Inversion)**.** *Soit* $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Preuve. Si $z' = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$, alors $zz' = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$. □

Remarque 1.5. Pour s'en rappeler, on peut "multiplier" par $\bar{z}$ en haut et en bas. Exemple: $\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{2^2+3^3} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

(v) Inégalité triangulaire: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Trois représentations des nombres complexes:

1) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$; c'est la **forme cartésienne**.
2) Si $r = |z|$, et $\theta = \arg(z)$, alors $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$. Donc tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$; c'est la **forme polaire**.
3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. (Justification plus tard !) Avec cette notation, tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$; c'est la **forme polaire-exponentielle**.

Remarque 1.6. Attention: Si $z = re^{i\theta}$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pm k2\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.5 (Exponentielle complexe)**.** Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on définit
$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Remarque 1.7. En forme cartésienne, les additions et soustractions sont faciles, mais les multiplications et divisions sont plus compliquées. En forme polaire-exp, c'est l'inverse: si $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = se^{i\varphi}$, alors $z_1 z_2 = (rs)e^{i(\theta-\varphi)}$ et $z_1/z_2 = (r/s)e^{i(\theta-\varphi)}$.

Exemples: Si $z = 1 + i$, alors $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, donc $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Si $z = e^{i\pi/3}$, alors $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (détails vus en classe).

Conséquences de l'exponentielle complexe:

- Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ (preuve en exercice). Donc si $z = re^{i\theta}$, on a $\bar{z} = re^{-i\theta}$.
- Interprétation géométrique de la multiplication complexe: Les modules se multiplient ($\Rightarrow$ agrandissement) et les arguments s'ajoutent ($\Rightarrow$ rotation). Ainsi $i \cdot z = z$ tourné d'un angle de $\pi/2$ (détails vus en classe).
- Formule d'Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Donc $e^{i\pi} = -1$.
- Formule de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$: Cela suit du fait que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Formules pour $\cos\theta, \sin\theta$:
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$
En effet, $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$; ces formules suivent donc des formules pour $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ vues plus haut.

Remarque 1.8. Pour résumer, si $z = a + bi = re^{i\theta}$ et $\omega = c + di = se^{i\varphi}$, on a
$$z = \omega \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ et } b = d \quad \Leftrightarrow \quad r = s \text{ et } \theta = \varphi + k \cdot 2\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}.$$

1.7 Calculs dans $\mathbb{C}$

1) Calcul de $(1 - \sqrt{3}i)^{30}$. Très long si on doit développer ! Mieux: $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\pi/3}$ (dessin vu en classe) et donc $(1 - \sqrt{3}i)^{30} = 2^{30}e^{-i10\pi} = 2^{30}(-1)^{10} = 2^{30}$.
2) Équation $z^n = 1$. On pose $z = r \cdot e^{i\theta}$ pour trouver $z^n = 1 \Leftrightarrow r^n \cdot e^{in\theta} = 1 \cdot e^{i0}$. Donc $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$ car $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n\theta = 0 + k2\pi \Rightarrow \theta = \frac{k2\pi}{n}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions sont donc $\{1 \cdot e^{ik2\pi/n} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{(\zeta_n)^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ où $\zeta_n = e^{i2\pi/n}$. Comme $(\zeta_n)^n = 1$, il y a en fait ***n* solutions distinctes**:
$$\{1, \zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^{n-1}\} = \{1, e^{i2\pi/n}, e^{i4\pi/n}, \ldots, e^{i2\pi(n-1)/n}\}.$$

Exemple:
- $z^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1, e^{i2\pi/2}\} = \{1, -1\}$.
- $z^3 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\} = \{1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$. Ces solutions forment un triangle équilatéral.
- $z^6 = 1$ possède 6 solutions qui forment un hexagone régulier.

3) Équation $z^n = \omega$. Étape 1: Trouver une solution z_0 (par exemple, si $\omega = se^{i\varphi}$, $z_0 = \sqrt[n]{s}e^{i\varphi/n}$). Étape 2: On a $z^n = \omega = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$. On trouve donc à nouveau $\boldsymbol{n}$ **solutions distinctes**:
$$\{z_0, z_0e^{i2\pi/n}, z_0e^{i4\pi/n}, \dots, z_0e^{i2\pi(n-1)/n}\}.$$
Exemple:
- $z^3 = i$. Étape 1: $z_0 = -i$ (ou $i = e^{i\pi/2} \Rightarrow z_0 = e^{i\pi/6}$). Étape 2: Les solutions sont $-i\cdot\{$solutions de $z^3 = 1\} = \{-i, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\} = \{e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}\}$.
- $z^2 = 5+12i$. Étape 1: On a $5+12i = 13e^{i\arctan(12/5)}$, donc on peut prendre $z_0 = \sqrt{5}e^{i\arctan(12/5)/2}$, ce qui est difficile à simplifier. Mieux: en posant $z_0 = a+bi \Rightarrow z^2 = a^2-b^2+2abi = 5+12i$. En combinant avec l'équation $|z_0|^2 = |5+12i| = 13$, on trouve le système ci-contre: En sommant l'équation 1 et 3, on a $2a^2 = 18 \Rightarrow a = 3$, d'où $b = 2$ grâce à l'équation 2. Ainsi $z_0 = 3+2i$, et les solutions sont: $\{\pm(3+2i)\}$.
$$\begin{cases} a^2-b^2 &= 5 \\ 2ab &= 12 \\ a^2+b^2 &= 13 \end{cases}$$

4) Factorisation de polynômes:

Théorème 1.7 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ (avec $a_i \in \mathbb{C}$) se factorise en*
$$P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) \quad (\textit{les } z_i \textit{ sont les } \textbf{\textit{racines}} \textit{ de } P.)$$

Corollaire 1.8. *Toute équation polynômiale $P(z) = 0$ de degré n a n solutions complexes (en comptant les multiplicités).*

Exemple: Si $P(z) = az^2+bz+c$, alors les solutions de $P(z) = 0$ sont $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, où l'on interprète $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ comme les deux solutions complexes de l'équation $u^2 = b^2-4ac$. Donc si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2-4ac \geq 0$, on a des solutions réelles, et si $b^2-4ac < 0$, on a $u^2 = b^2-4ac = i^2(4ac-b^2) \Rightarrow u = \pm i\sqrt{4ac-b^2}$.

Remarque 1.9. Si $P(z)$ est à coefficients réels (les $a_i \in \mathbb{R}$), alors les racines non-réeles viennent par paires conjuguées (exercice !). En les groupant, on trouve donc une factorisation réelle.

Exemple: $P(z) = z^4+1$. On résout $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$ comme avant. On trouve les 4 solutions $\{\frac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}\}$. On a donc une factorisation complexe et réelle:
$$z^4+1 = (z-\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})(z-\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})(z-\tfrac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\tfrac{-1+-i}{\sqrt{2}}) = (z^2-\tfrac{1}{\sqrt{2}}z+1)(z^2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}z+1).$$
Remarque 1.10. En développant, on trouve (si $a_n = 1$):
$$\begin{array}{llcll} z^n & +a_{n-1}\,z^{n-1} & +\ \cdots\ + & a_0 & = (z-z_1)\cdot\cdots\cdot(z-z_n) \\ = z^n & -(z_1+\cdots+z_n)\,z^{n-1} & +\ \cdots\ + & (-1)^n z_1\cdots z_n & \end{array}$$
Ainsi la somme des 4 racines $\frac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$ vaut 0 et leur produit vaut 1.

Chapitre 2: Suites

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1. Une **suite de nombres réels** est une fonction $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
Notation (au lieu de la notation de fonctions): $n \longmapsto a(n) = a_n$.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\geq 0} = (a_n)_n = (a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Exemples:

1) $a_n = 2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$. Ce sont les nombres impairs:
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7,\ 9,\ 11, \dots\big).$$
2) **Suite harmonique**: $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \Big(a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\Big).$$
3) **Suite arithmétique**: $a_n = bn + c$ $(n \in \mathbb{N}, b, c \in \mathbb{R})$:
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(a_0 = c, a_1 = b + c, a_2 = 2b + c, a_3 = 3b + c, 4b + c, 5b + c, \dots\big).$$
Exemples: $b = 2, c = 1 \Rightarrow a_n = 2n + 1$; $b = 1, c = 0 \Rightarrow a_n = n; b = 0 \Rightarrow (a_n) = (c, c, c, c, c, c, \dots)$ (suite constante).
4) **Suite géométrique**: $a_n = ar^n$ $(n \in \mathbb{N}, a, r \in \mathbb{R}$; le r est la **raison** de la suite):
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(a_0 = a, a_1 = ar, a_2 = ar^2, a_3 = ar^3, ar^4, ar^5, \dots\big).$$
Exemples: $a = 1, r = 2 \Rightarrow a_n = 2^n$ $(a_0 = 1, 2, 4, 8, 16, \dots)$; $a = 1, r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n}$ $(a_0 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$; $a = 1, r = -1 \Rightarrow a_n = (-1)^n$ $(a_0 = 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$.

Définition 2.2. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1) **majorée** (resp. **minorée**, **bornée**) si l'ensemble $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'est.
2) **croissante** (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \geq a_n$ (resp. $a_{n+1} > a_n,\ a_{n+1} \leq a_n,\ a_{n+1} < a_n$).
3) (strictement) **monotone** si (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Proposition 2.1. *Une suite (a_n) est bornée $\Leftrightarrow$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Exercice. □

Exemples:

1) $a_n = 2n + 1 \Rightarrow A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. A est minoré par 1, mais pas majoré, donc pas borné. C'est pareil pour la suite (a_n) (mais en accordant les adjectifs !). De plus, $a_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 3 > 2n + 1 = a_n$, donc la suite est strictement croissante (et donc aussi strictement monotone).
2) Suite harmonique: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. La suite est donc bornée (majorée par 1, minorée par 0) et strictement décroissante ($a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$).

3) Suite arithmétique: $a_n = bn + c$. Si $b > 0$, (a_n) est strictement croissante, minorée par $c = a_0$ mais pas majorée: en effet, si $M \in \mathbb{R}$, alors $a_n > M$ dès que $n > \frac{M-c}{b}$ (car $bn + c > M \Leftrightarrow n > \frac{M-c}{b}$).
4) Suite géométrique: $a_n = ar^n$. Si $a > 0$, la suite est strictement croissante pour $r > 1$, strictement décroissante pour $0 < r < 1$, bornée pour $r \in [-1, 1]$, pas majorée pour $r > 1$ (cf exercices).

Définition 2.3 (Suites définies par récurrence)**.** $a_0 =$ valeur fixée, $a_{n+1} = g(a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Ex: $a_0 = 0$, $g(x) = x + 1$. Donc $a_1 = g(a_0) = 0 + 1 = 1, a_2 = g(a_1) = 1 + 1 = 2, a_3 = 3$, $a_4 = 4$... **Affirmation:** $a_n = n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.
Pour démontrer ce genre de résultat, on utilise la:

Définition 2.4 (Preuve par récurrence)**.** Si $P(n)$ est une proposition qui dépend d'un entier n, et si

1) *Initialisation:* $P(n_0)$ est vraie et
2) *Pas de récurrence:* $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ pour tous $n \geq n_0$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Preuve de l'affirmation. On montre $P(n) =$ "$a_n = n$" par récurrence sur $n \geq 0$.

1) *Initialisation:* $a_0 = 0$, donc $P(0)$ est vraie.
2) *Pas de récurrence:* On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} = g(a_n) &= a_n + 1 && \text{par définition} \\ &= n + 1 && \text{par l'hypothèse de récurrence } P(n). \end{aligned}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

On conclut donc que $P(n) =$ "$a_n = n$" est vraie pour tout $n \geq 0$. □

Fausses preuves par récurrence:

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = n + 7$. En effet, si $P(n) =$ "$n = n + 7$", alors on a $n + 1 \overset{P(n)}{=} (n + 7) + 1 = (n + 1) + 7$, et donc $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, et $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
Faute: On a oublié l'initialisation: $P(0)$ est fausse, car $0 \neq 7$.
2) Tous les chats sont de la même couleur. Traité en classe.

Définition 2.5 (Preuve par récurrence forte)**.** Si $P(n)$ est une proposition qui dépend d'un entier n, et si

1) *Initialisation:* $P(n_0)$ est vraie et
2) *Pas de récurrence forte:* $\{P(n_0), P(n_0 + 1), \ldots, P(n)\} \Rightarrow P(n + 1)$ pour tous $n \geq n_0$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Retour aux exemples de suites définies par récurrence:

1) $a_0 = c, a_{n+1} = a_n + b \quad \Rightarrow \quad a_n = bn + c$. (Exercice)
2) $a_0 = a, a_{n+1} = a_n \cdot r \quad \Rightarrow \quad a_n = ar^n$. (Exercice)
3) $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. Attention: ce n'est techniquement pas une suite définie par récurrence au sens de la définition précédente, car la fonction $g(x) = x + 2n + 1$ dépend de n. On a $a_0 = 0, a_1 = a_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1, a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 3 = 4, a_3 = 4 + 5 = 9$.
   Affirmation: $a_n = n^2$.
   Preuve. Par récurrence sur $n \geq 0$.
   1) *Initialisation:* $a_0 = 0 = 0^2$.
   2) *Pas de récurrence:* $a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \overset{P(n)}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

   Donc $a_n = n^2$ pour tout $n \geq 0$. □

4) Suite de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Attention: pas non plus "définie par récurrence", car $f_{n+1} = g(f_{n+1}, f_n)$. On a $f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, 13, 21, 34, \ldots$.
   Prop: $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ où $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le *nombre d'or* et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Preuve. 1) *Initialisation:* $P(0) : \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0 = f_0$.
   $P(1) : \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}} = \frac{1/2 + \sqrt{5}/2 - 1/2 + \sqrt{5}/2}{\sqrt{5}} = 1 = f_1$.
   2) *Pas de récurrence:* On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, et on montre que $P(n+2)$ est vraie (cf Exercices !) □

   Une meilleure preuve sera (peut-être) vue en algèbre linéaire.

2.2 Convergence et limites

Idée: On considère $a_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$. Alors a_n s'approche de plus en plus de 0. Plus précisément: a_n devient et reste *arbitrairement proche de 0*, pourvu qu'on prenne n *assez grand.*

Définition 2.6. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers** $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Notation: $a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a, a_n \longrightarrow a, \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Dans ce cas, a est la **limite** de la suite. Si (a_n) ne converge vers aucun $a \in \mathbb{R}$, on dit que la suite **diverge**.

Intuition: ε est la distance "visée", et N est le cran/l'indice à partir duquel la distance $|a_n - a|$ entre a_n et a est $\leq \varepsilon$. Exemples:

1) Soit $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Alors $a_n \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

   Preuve formelle. (Intuition de la preuve vue en cours.) Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $n \geq N$, on a
$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon, \quad (\text{car } \frac{1}{N} \leq \varepsilon \Leftrightarrow N \geq \frac{1}{\varepsilon}).$$
   Comme ε était arbitraire, on a montré:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \text{ on a } |a_n - 0| \leq \varepsilon. \quad \text{D'où } a_n \longrightarrow 0.$$
□

2) Soit $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Alors (a_n) diverge. Intuition de la preuve vue en cours.
Preuve formelle. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $\varepsilon = 0.9$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a:
   - Si $a \geq 0$, on prend $n \geq N$ impair, de sorte que $a_n = -1$, et donc $|a_n - a| \geq 1$, et si $a \leq 0$, on prend $n \geq N$ pair, de sorte que $a_n = 1$, et donc $|a_n - a| \geq 1$. □

3) Soit $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$. Alors (a_n) diverge.
Preuve. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $\varepsilon = 1$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, dès que $n \geq \max(N, a+2)$, on a $|a_n - a| = |n - a| \geq 2 > 1 = \varepsilon$, donc a_n reste loin de a. □

4) Soit $a_n = c$ (suite constante). Alors $a_n \longrightarrow c$.
Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N = 0$. Alors dès que $n \geq N$, on a $|a_n - c| = |c - c| = 0 \leq \varepsilon$. □

Proposition 2.2 (Unicité de la limite)**.** *Si (a_n) converge, sa limite est unique.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $a_n \longrightarrow a$ et $a_n \longrightarrow b$ avec $a \neq b$. On pose $\varepsilon = \frac{|a-b|}{10}$. Par définition, il existe N_a tel que $|a_n - a| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N_a$, et il existe N_b tel que $|a_n - b| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N_b$. Donc pour $n \geq N_a, N_b$, on a

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |a-b|,$$

donc $|a-b| < |a-b|$, ce qui est absurde. □

Proposition 2.3. *Si (a_n) converge, alors (a_n) est bornée.*

Idée de la preuve. Vue en classe. (Preuve formelle laissée en exercice) □

Remarque 2.1. L'autre direction est fausse: $a_n = (-1)^n$ est bornée, mais diverge.

Proposition 2.4 (Caractérisation des sup/inf avec les suites)**.** *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide borné. Alors* $\begin{array}{c} x = \sup A \\ x = \inf A \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \geq a \\ x \leq a \end{array}$ $\forall a \in A$ *et s'il existe une suite $(a_n) \subseteq A$ telle que $a_n \longrightarrow x$.*

Preuve. Exercice. □

2.3 Propriétés des limites

Proposition 2.5 (Propriétés algébriques des limites)**.** *Si (a_n) et (b_n) sont deux suites convergentes, alors:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (pa_n + qb_n) = p \lim\limits_{n\to\infty} a_n + q \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *pour tous $p, q \in \mathbb{R}$,*
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Preuve. Posons $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, et $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) On choisit N tel que pour $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2|p|}$ et $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|q|}$. Donc, dès que $n \geq N$, on a
$$\begin{aligned} |pa_n + qb_n - (pa+qb)| &= |p(a_n - a) + q(b_n - b)| \\ &\leq |p| \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \varepsilon/2|p|} + |q| \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \varepsilon/2|q|}. \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
2) On choisit N tel que pour $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$ et $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|a|}$ et ≤ 1. Donc, dès que $n \geq N$, on a
$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n - a| \underbrace{|b_n|}_{\substack{=|b_n - b + b| \\ \leq |b_n - b| + |b| \\ \leq 1 + |b|}} + |a| \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \varepsilon/2|a|} \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}}(1+|b|) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$
3) Exercice.

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, 1),2) et 3) en découlent. $\square$

Exemples:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(2+3/n)}{n(3-5/n)} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+3/n}{\lim\limits_{n\to\infty} 3-5/n} = \dfrac{2+0}{3-0} = \dfrac{2}{3}$. Attention: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n-5} \neq \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2n+3}{\lim\limits_{n\to\infty} 3n-5}$ car ces limites n'existent pas.
2) Fausse preuve que $1 = 2$ (vu en classe).
3) Les suites arithmétiques $a_n = bn + c$ divergent si $b \neq 0$.

   Preuve. Sinon, on aurait $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, et donc $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - c}{b} = \dfrac{a-c}{b}$. Mais on a vu que $\lim\limits_{n\to\infty} n$ n'existe pas ! $\square$

Proposition 2.6. *Si (a_n) et (b_n) convergent et $a_n \leq b_n$ pour n assez grand*[1]*, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$, on a $a_n \leq b_n$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|b_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $a \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = b + \varepsilon$. On a donc montré que $a \leq b + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. D'où $a \leq b$. $\square$

Théorème 2.7 (Deux Gendarmes / Sandwich)**.** *Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour n assez grand, et si $a_n \longrightarrow \ell$ et $c_n \longrightarrow \ell$, alors $b_n \longrightarrow \ell$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n \leq b_n \leq c_n$, $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $|c_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors $-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$, d'où $-\varepsilon \leq b_n - \ell \leq \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - \ell| \leq \varepsilon$. $\square$

1. c'est à dire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leq b_n$ dès que $n \geq N$

Exemples plus compliqués:

1) Pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$. (Revu plus tard !)
   Preuve. Si $x \geq 1$, on a $0 \leq \sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}$. En effet, comme $1 \leq x$, on a $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{x}$, et donc $\sqrt[n]{x} - 1 \geq 0$. De l'autre côté, on a, par un exercice:
   $$(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1) = y^n - 1 \quad \Rightarrow \quad y-1 = \frac{y^n-1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1}.$$
   On applique cela à $y = \sqrt[n]{x}$, pour trouver
   $$0 \leq \sqrt[n]{x} - 1 = \frac{x-1}{\underbrace{x^{\frac{n-1}{n}}}_{\geq 1} + \underbrace{x^{\frac{n-2}{n}}}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{x^{\frac{1}{n}}}_{\geq 1} + 1} \leq \frac{x-1}{n} \longrightarrow 0$$
   Par le théorème des deux gendarmes, on a donc $\sqrt[n]{x} - 1 \longrightarrow 0$, d'où $\sqrt[n]{x} \longrightarrow 1$.
   Et si $x \leq 1$, on pose $y = \frac{1}{x} \geq 1$, et on utilise la partie précédente pour trouver
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1} = 1. \qquad \square$$

2) Soit $a_n = \frac{5^n}{n!}$. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (traité en classe). De manière similaire, $\dfrac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Suites géométriques $a_n = ar^n$, pour $a > 0$ et $r > 0$. La suite converge vers 0 si $0 < r < 1$, est constante $= a$ si $r = 1$, et diverge si $r > 1$.
   Preuve. Si $r > 1$, on montre par récurrence que $a_n \geq a(r-1)n$ (suite arithmétique $\Rightarrow$ non-bornée). Init: $a_0 = a \geq 0$. Pas de récurrence:
   $$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + a_n = \underbrace{r^n}_{\geq 1} a(r-1) + \underbrace{a_n}_{\geq a(r-1)n} \geq a(r-1)(n+1).$$
   Si $r < 1$, soit $\varepsilon > 0$. On pose $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}s^n$ avec $s = \frac{1}{r} > 1$, et donc b_n n'est pas bornée (par la partie précédente). On trouve donc N tel que pour tout $n \geq N$, on a $b_n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors, dès que $n \geq N$, $|a_n - 0| = a_n = \frac{1}{b_n} \leq \varepsilon$. $\square$

2.4 Limites infinies

Définition 2.7. Une suite (a_n) **tend vers** $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\begin{matrix} a_n \geq A \\ a_n \leq A \end{matrix}$. Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $a_n \longrightarrow \pm\infty$.

Avec des mots: a_n devient et reste arbitrairement $\begin{matrix}\text{grand} \\ \text{petit}\end{matrix}$, pour n assez grand. Attention: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, la suite (a_n) n'est pas bornée, donc divergente ! Exemples:

- $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On choisit $N \geq A$. Alors dès que $n \geq N$, on a $a_n = n \geq N \geq A$. Comme A était arbitraire, on a $a_n \longrightarrow +\infty$.
- $\lim_{n\to\infty} n^7 = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[7]{n} = +\infty$: Vu en classe.

Proposition 2.8 (Opérations algébriques sur les limites infinies)**.** *Soient (a_n) et (b_n) deux suites.*

1) $\boxed{\begin{array}{c}+\infty+\infty=+\infty\\ -\infty-\infty=-\infty\end{array}}$ *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{array}{c}+\infty\\ -\infty\end{array}$ *et* $\lim_{n\to\infty} b_n = \begin{array}{c}+\infty\\ -\infty\end{array}$ *et $p,q>0$, alors on a* $\lim_{n\to\infty}(pa_n+qb_n) = \begin{array}{c}+\infty\\ -\infty\end{array}$. Attention: $\infty-\infty$ et $0\cdot\infty$ ne sont pas définis.

2) $\boxed{\pm\infty+c=\pm\infty}$ *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ *et (b_n) est bornée, alors* $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\pm\infty$.

3) $\boxed{\textit{Théorème du gendarme seul / de la tartine}}$ *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{array}{c}+\infty\\ -\infty\end{array}$ *et* $\begin{array}{c}b_n\geq a_n\\ b_n\leq a_n\end{array}$ *pour n assez grand, alors* $\lim_{n\to\infty} b_n = \begin{array}{c}+\infty\\ -\infty\end{array}$.

4) $\boxed{(+\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty}$ *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\pm\infty$, *alors* $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\pm\infty$.

5) $\boxed{\frac{c}{\pm\infty}=0}$ *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$ *et (b_n) est bornée, alors* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$. Attention: $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$ ne sont pas définis.

Preuve. 1)-4) exercice facile. Pour 5) soit $\varepsilon>0$. Soit M tel que $|b_n|\leq M$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tous $n\geq N$, on a $|a_n|\geq A=\frac{M}{\varepsilon}$ (possible car $a_n\longrightarrow\pm\infty$). Alors, pour $n\geq N$, $|\frac{b_n}{a_n}-0|=\frac{|b_n|}{|a_n|}\leq\frac{M}{|a_n|}\leq\varepsilon$. Comme ε était arbitraire, on a bien $\frac{b_n}{a_n}\longrightarrow 0$. $\square$

Formes indéterminées:

1) $\infty-\infty$. On considère les trois suites $a_n=(n+1)^2-n^2, b_n=(n+1)-n$, et $c_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. En prenant la limite, les trois sont du type $\infty-\infty$, mais on a $a_n\longrightarrow\infty, b_n\longrightarrow 1$, et $c_n\longrightarrow 0$ (détails vus en classe).
2) $\infty\cdot 0$. On considère les suites $a_n=n^2\cdot\frac{1}{n}, b_n=n\cdot\frac{1}{n}$, et $c_n=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}$. En prenant la limite, les trois sont du type $\infty\cdot 0$, mais on a $a_n\longrightarrow\infty, b_n\longrightarrow 1$, et $c_n\longrightarrow 0$.
3) $\frac{\infty}{\infty}$. On considère $a_n=\frac{n^2+1}{n^k+2}$. Si $k=1$, $a_n\longrightarrow\infty$, si $k=2$, $a_n\longrightarrow 1$ et si $k=3$, $a_n\longrightarrow 0$.
4) $\frac{0}{0}$. Prendre l'inverse en haut et en bas dans l'exemple précédent.

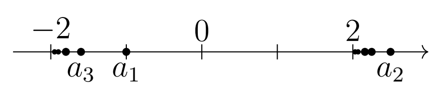
2.5 Liminf et Limsup

Définition 2.8. Soit (a_n) une suite. On note $\{a_{\geq n}\}=\{a_m\mid m\geq n\}$, et on définit:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sup\{a_{\geq n}\}\qquad\text{et}\qquad\liminf_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\inf\{a_{\geq n}\}$$

Exemple: Considérons la suite $a_n=\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)(-1)^n$, pour $n\geq 1$. Alors

$$(a_n)=(-1,2.5,-1.\bar{6},2.25,-1.8,2.1\bar{6},\dots)$$



$\{a_{\geq 1}\}=\{-1,2.5,-1.\bar{6},2.25,-1.8,2.1\bar{6},\dots\}$, et $\{a_{\geq 2}\}$ (resp. $\{a_{\geq 3}\}$, ...) s'obtiennent en enlevant le premier (resp. les deux premiers,...) éléments de cet ensemble. On a donc le tableau suivant:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\sup\{a_{\geq n}\}$	$a_2=2.5$	$a_2=2.5$	$a_4=2.25$	$a_4=2.25$	a_6	a_6	a_8	a_8	$\cdots$
$\inf\{a_{\geq n}\}$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	$\cdots$

Ainsi

$$(\inf\{a_{\geq n}\})_n = (-2,-2,-2,\dots) \quad \text{et} \quad (\sup\{a_{\geq n}\})_n = (a_2,a_2,a_4,a_4,a_6,a_6,\dots),$$

d' où $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}\left(2+\frac{1}{2k}\right) = 2.$

Remarque 2.2. En fait, on voit que $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{2k+1}\right)\cdot(-1) = -2.$

Définition 2.9. Pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'*entiers* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strictement croissante ($n_{k+1} > n_k$), la **sous-suite** correspondante est $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Exemple: Si $a_n = \frac{1}{n+4}$ et $n_k = 2k+1$, on a $a_{n_k} = \frac{1}{(2k+1)+4} = \frac{1}{2k+5}$. Attention: $n_k = 5$ et $n_k = \frac{1}{k}$ ne sont pas des indices valables.

Remarque 2.3. Si $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, alors $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ pour toute sous-suite (a_{n_k}) (Exercice.)

Théorème 2.9. *Pour une suite bornée (a_n), on a*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max\left\{\begin{matrix}\textit{limites de sous-suites}\\ \textit{convergentes}\end{matrix}\right\} \textit{ et } \liminf_{n\to\infty} a_n = \min\left\{\begin{matrix}\textit{limites de sous-suites}\\ \textit{convergentes}\end{matrix}\right\}.$$

Remarque 2.4.

- Pour (a_n) générale, $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas forcément, mais $\liminf_{n\to\infty} a_n$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existent toujours (dans $\mathbb{R}$ si la suite est bornée, et dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ si elle ne l'est pas). Cf section suivante !
- On a $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$, avec égalité si et seulement si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe ! Dans ce cas, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Exemples:

- $a_n = (-1)^n$. <u>Avec le théorème:</u> Si $n_k = 2k$, alors $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1 \longrightarrow 1$. Comme $a_n \leq 1$, il n'y a pas de sous-suite plus grande ! D'où $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$. Similairement, si $n_k = 2k+1$, alors $a_{n_k} = (-1)^{2k+1} = -1 \longrightarrow -1 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.
  <u>Sans le théorème:</u> $(a_n) = (1,-1,1,-1,1,\dots) \Rightarrow \{a_{\geq n}\} = \{-1,1\}\ \forall n$. D'où $\sup\{a_{\geq n}\} = 1 \to 1 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ et $\inf\{a_{\geq n}\} = -1 \to -1 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.
- $a_n = \dfrac{(-2)^n - 1}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n) = (-3, 1, -\frac{9}{7}, 1, -\frac{33}{31}, 1, \dots)$.
  <u>Avec le théorème:</u> Si $n_k = 2k$, alors $a_{n_k} = \frac{2^{2k}-1}{2^{2k}-1} = 1 \longrightarrow 1 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, et si $n_k = 2k+1$, alors $a_{n_k} = \frac{-2^{2k+1}-1}{2^{2k+1}-1} = -\frac{1+2^{-(2k+1)}}{1-2^{-(2k+1)}} \longrightarrow -\frac{1}{1} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.
  <u>Sans le théorème:</u> On a, suivant la parité de n:
  $$\{a_{\geq n}\} = \{1, -\tfrac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1}, 1, -\tfrac{2^{n+3}+1}{2^{n+3}-1}, 1, \dots\} \text{ ou } \{-\tfrac{2^n+1}{2^n-1}, 1, -\tfrac{2^{n+2}+1}{2^{n+2}-1}, 1, -\tfrac{2^{n+4}+1}{2^{n+4}-1}\dots\}.$$
  Donc $\sup\{a_{\geq n}\} = 1 \to 1 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = 1$. Et pour $\inf\{a_{\geq n}\}$, on remarque que la suite $b_n = -\frac{2^n+1}{2^n-1}$ est croissante (vérifier que $b_{n+1} > b_n$). Donc
  $$\inf\{a_{\geq n}\} = \begin{cases} -\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1} \longrightarrow -1 \\ \text{ou } -\frac{2^n+1}{2^n-1} \longrightarrow -1 \end{cases} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

2.6 Critères de convergence

Question: (a_n) converge-t-elle ? (Pas: vers quoi ?)

Théorème 2.10 (Croissante + majorée)**.** *Toute suite* $\begin{matrix}\textit{croissante } (a_{n+1} \geq a_n)\\ \textit{décroissante } (a_{n+1} \leq a_n)\end{matrix}$ *et* $\begin{matrix}\textit{majorée}\\ \textit{minorée}\end{matrix}$ *converge* $\left(\textit{vers } \begin{matrix}\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\end{matrix}\right)$.

Corollaire 2.11. *Toute suite monotone et bornée converge.*

Preuve du théorème (cas croissante + majorée). Posons $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $s = \sup A$, et fixons $\varepsilon > 0$. Par définition du sup, il existe $a \in A$ tel que $s - \varepsilon \leq a \leq s$. Comme $a \in A$, on a $a = a_N$ pour un $N \in \mathbb{N}$. Mais dès que $n \geq N$, on a $a_n \geq a_N$ et donc

$$s - \varepsilon \leq a_N \leq a_n \leq s \Rightarrow a_n \in [s - \varepsilon, s] \Rightarrow |a_n - s| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Exemples:

1) Si (a_n) est bornée, alors $|a_n| \leq M$ pour un $M \in \mathbb{R}$. La suite $s_n = \sup\{a_{\geq n}\}$ est donc minorée (par $-M$), et comme $\{a_{\geq n+1}\} \subseteq \{a_{\geq n}\}$, on a
$$s_{n+1} = \sup\{a_{\geq n+1}\} \leq \sup\{a_{\geq n}\} = s_n.$$
La suite (s_n) est donc décroissante et minorée $\Rightarrow$ (s_n) converge $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. (Et similairement pour lim inf).

2) On considère les suites $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et b_n définie par $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$. Une récurrence montre que $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Quelques valeurs:
$$(a_n)_{n\geq 1} = (2,\ 2.25,\ 2.\overline{370},\ \dots) \qquad (b_n)_{n\geq 0} = (1,\ 2,\ 2.5,\ 2.\overline{6},\ 2.70\overline{83},\ \dots).$$
Affirmation:
$$\left.\begin{array}{rl}\text{(i)} & a_n \leq b_n \text{ pour tous } n \geq 1,\\ \text{(ii)} & (b_n) \text{ est majorée (donc } (a_n) \text{ aussi)},\\ \text{(iii)} & (a_n) \text{ est croissante},\\ \text{(iv)} & (b_n) \text{ est croissante.}\end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent !}$$
Preuve. (i) On a $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \dfrac{1}{n^k} \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = b_n$, où pour les $=$ on a utilisé, dans l'ordre, définition de a_n, la formule du binôme de Newton (exercice 2(b), série 3) et la définition de b_n, et l'inégalité vient du fait que
$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n!/(n-k)!}{n^k} = \frac{1}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1}\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leq 1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}.$$
(ii) On a $\dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{k\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \leq \dfrac{1}{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2} = \dfrac{1}{2^{k-1}} = 2\dfrac{1}{2^k}$, d'où
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} \leq 2\frac{1-0}{1/2} = 4,$$

où l'égalité du milieu suit de la formule $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$, (cf exercice 1, série 3).

(iii) En utilisant le fait que $\frac{a}{b} \leq \frac{a+1}{b+1}$ si $0 < a \leq b$ (exercice facile !), et en reprenant l'argument du (i), on remarque que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!}\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &\leq \frac{1}{k!}\frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{n-k+2}{n+1} = \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}\end{aligned}$$

d'où $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
$= a_{n+1}$.

(iv) On a simplement $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{(n+1)!} \geq b_n$. □

Par croissance majorée, (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux ! En fait, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e = 2.7182818\cdots = \textbf{nombre d'Euler}.$$

Théorème 2.12 (Critère de D'Alembert pour les suites)**.** *Soit (a_n) une suite telle que $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe $\in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Alors $a_n \longrightarrow 0$ si $\rho < 1$ et (a_n) diverge si $\rho > 1$.*

Remarque 2.5.
- Attention: le critère ne se prononce pas si $\rho = 1$.
- Plus généralement: $a_n \to 0$ si $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ et (a_n) diverge si $\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Preuve. Si $\rho < 1$, alors $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \longrightarrow \rho < 1$, on trouve donc un $r < 1$ tel que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq r$ pour n assez grand, disons $n \geq N$. On montre par récurrence que $|a_n| \leq |a_N| r^{n-N} = Ar^n \to 0$ car c'est une suite géométrique avec $|r| < 1$ (où $A = r^{-N}|a_N|$). Init: $|a_N| = |a_N|r^0$. Pas de récurrence: Comme $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq r$, on a $|a_{n+1}| \leq |a_n| r \leq Ar^n r = Ar^{n+1}$. Et si $\rho > 1$, on pose $b_n = \frac{1}{a_n}$, et on a $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \frac{1}{\rho} < 1$. Donc $|b_n| \longrightarrow 0$, et ainsi $|a_n| \longrightarrow \infty \Rightarrow (a_n)$ diverge. □

Exemple: $a_n = \dfrac{n^{140}}{2^n}$. On a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{140}/2^{n+1}}{n^{140}/2^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{140}\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$. Donc $a_n \longrightarrow 0$.

Convergence de suites définies par récurrence: On considère une suite (a_n) définie par $a_0 = a$, $a_{n+1} = g(a_n)$ pour une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Remarque importante: **Si** (a_n) converge, disons $a_n \longrightarrow \ell$, alors

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \overset{(*)}{=} g\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = g(\ell) \quad \Rightarrow \quad \ell \text{ est solution de } x = g(x),$$

où $(*)$ est vraie si g est continue (cf chapitre 4). Exemples:

1) $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 = g(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$. Solution de $x = g(x)$: $x = \ell = -2$. On a $(a_n) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{13}{8}, \ldots, -1.999\ldots)$. En effet, (a_n) semble donc converger vers -2.

2) $a_0 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 1$. La solution de $x = g(x)$ est $\ell = \frac{1}{2}$ mais $(a_n) = (1, 2, 5, 14, \dots)$ semble diverger !
3) $a_0 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 3a_n - 1$. Ici $(a_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots) \longrightarrow \frac{1}{2}$.

Théorème 2.13 (Récurrences linéaires)**.** *Soit (a_n) une suite où a_0 est fixé où $a_{n+1} = g(a_n)$ avec $g(x) = qx + b$, $q, b \in \mathbb{R}$, et soit ℓ la solution de $x = g(x)$. Alors:*

1) Si $q \neq 1$, on a $a_n = \ell + q^n(a_0 - \ell)$.

$\Rightarrow a_n \longrightarrow \ell$ *si* $|q| < 1$ *ou si* $a_0 = \ell$, *et* (a_n) *diverge dans le cas contraire.*

2) Si $q = 1$, on a $a_n = a_0 + nb$.

$\Rightarrow (a_n)$ *est constante* $= a_0$ *si* $b = 0$, *et* (a_n) *diverge dans le cas contraire.*

Preuve. Le cas $q = 1$ et les conclusions de convergence sont laissées en exercice (facile). Pour $q \neq 1$, on montre la formule par récurrence: Init: $a_0 = \ell + (a_0 - \ell)$. Pas de récurrence: $a_{n+1} = g(a_n) = qa_n + b \overset{(*)}{=} q(\ell + q^n(a_0 - \ell)) + b = \underbrace{q\ell + b}_{=g(\ell)=\ell} + q^{n+1}(a_0 - \ell)$, où l'on a utilisé l'hypothèse de récurrence en $(*)$. □

Exemple non linéaire: $a_0 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = g(a_n)$ avec $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$.

1) *Candidats pour ℓ:* Solutions de $x = g(x) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
2) *Exclure tous les cas sauf 1.* On calcule quelque valeurs: $(a_n) = (3, 2, 1.75, \dots)$, ce qui nous donne l'idée de montrer que $a_n > 0$, par récurrence: Init: $a_0 = 3 > 0$. Pas de récurrence: $a_{n+1} = \frac{1}{2}((>0) + \frac{3}{(>0)}) > 0$. Donc $\ell = -\sqrt{3}$ est impossible, et le candidat est $\ell = \sqrt{3}$.
3) *Montrer que $a_n \to \ell$.*

   Méthode 1: Montrer que $|a_n - \ell| \longrightarrow 0$ directement. On calcule :
$$a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n} - 2\sqrt{3}\right) = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{3}a_n + 3}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2a_n}.$$
   Comme cette dernière expression est > 0, cela montre que $a_{n+1} - \sqrt{3} > 0$, et comme c'est vrai aussi pour $a_0 = 3$, on trouve: $a_n > \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi:
$$|a_{n+1} - \sqrt{3}| = a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{3}) \cdot \underbrace{\frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{3}).$$
   On montre alors par récurrence que $|a_n - \sqrt{3}| \leq (\frac{1}{2})^n(3 - \sqrt{3})$. Init: OK. Pas de réc: $|a_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2}|a_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n(3 - \sqrt{3}) = (\frac{1}{2})^{n+1}(3 - \sqrt{3})$. On trouve finalement:
$$|a_n - \sqrt{3}| \leq (\tfrac{1}{2})^n(3 - \sqrt{3}) \longrightarrow 0.$$
   Méthode 2: Montrer que (a_n) converge, et vérifier que $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\lim_{n\to\infty} a_n)$. Comme pour la méthode 1, on montre que $a_n \geq \sqrt{3}$; la suite est donc minorée, et on calcule
$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n} - a_n \leq \frac{3}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq a_n.$$

Ainsi elle est également décroissante, et converge donc par décroissance minorée. Finalement on vérifie (grâce aux résultats sur les quotients de limites) que:

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

Remarque 2.6. On peut aussi utiliser la continuité de la fonction g dans cette dernière étape (cf chapitre 4).

Critère de Cauchy:

Définition 2.10. Une suite (a_n) est **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

Avec des mots: ses termes deviennent *arbitrairement proches les uns des autres*, lorsque les indices sont assez grands.

Théorème 2.14 (Convergente $\Leftrightarrow$ de Cauchy)**.** *Une suite (a_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Exemple: Pour $b < c$, on définit la suite a_n par $a_0 = b, a_1 = c$ et $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$. Soit alors $\varepsilon > 0$, et soit N tel que $2^N \geq \dfrac{c-b}{\varepsilon}$. On remarque (image vue en cours) que dès que $m, n \geq N$, a_m et a_n appartiennent au même intervalle de longueur $\dfrac{c-b}{2^N}$. Ainsi

$$|a_m - a_n| \leq \frac{c-b}{2^N} \leq \varepsilon \quad (\text{car } 2^N \geq \frac{c-b}{\varepsilon}).$$

Donc (a_n) est de Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) converge !

Pour démontrer le critère de Cauchy, on a besoin de:

Théorème 2.15 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite* bornée *possède une sous-suite convergente.*

Rappel: Une **sous-suite** d'une suite $(a_n)_n$ est une suite de la forme $(a_{n_k})_k$ où $(n_k)_k$ est une suite d'entiers strictement croissante ($n_{k+1} > n_k$).

Exemple: $a_n = (-1)^n$ est une suite bornée, mais divergente (elle ne converge pas). En revanche les sous-suites $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ et $a_{2k+1} = -1$ sont constantes, donc convergentes !

Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass. Comme (a_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M \Leftrightarrow a_n \in [-M, M]$ pour tout n. On sépare $[-M, M]$ en $I_1 = [-M, 0]$ et $J_1 = [0, M]$, et on remarque que soit I_1 soit J_1 contient a_n pour une infinité de n ; disons J_1. On choisit n_1 tel que $a_{n_1} \in J_1$. On sépare alors J_1 en deux intervalles I_2, J_2, et à nouveau, soit I_2, soit J_2 contient a_n pour une infinité de n ; disons J_2. On choisit alors n_2 tel que $n_2 > n_1$ et $a_{n_2} \in J_2$. On continue ainsi et on trouve une suite d'indices strictement croissante (n_k) telle que a_{n_k} se trouve dans un intervalle J_k de taille de plus en plus petite.

Si on note $J_k = [b_k, c_k]$, on remarque alors que (b_k) est une suite croissante et majorée, que (c_k) est décroissante et minorée, et que (b_k) et (c_k) convergent vers la même limite ℓ par construction. Comme $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k$, on a $a_{n_k} \longrightarrow \ell$ par le théorème des deux gendarmes. $\square$

Preuve du critère de Cauchy. Pour $\Rightarrow$, soit (a_n) une suite telle que $a_n \longrightarrow a$; on doit montrer que (a_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, dès que $m, n \geq N$, on a

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que (a_n) est de Cauchy.

Pour $\Leftarrow$, on commence par montrer que la suite est bornée. Soit $\varepsilon = 1$ et N tel que pour tous $m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \varepsilon = 1$. Alors, $a_n \in [a_N - 1, a_N + 1]$ dès que $n \geq N$, et ainsi

$$|a_n| \leq M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\},$$

(a_n) est donc bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous suite a_{n_k} qui converge, disons vers a. Soit alors $\varepsilon > 0$, N tel que $\forall m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et k tel que $|a_{n_k} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $n_k \geq N$. Alors dès que $n \geq N$ on a (en posant $m = n_k$)

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_m| + |a_{n_k} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que $a_n \longrightarrow a$. $\square$

Chapitre 3: Séries

3.1 Définition et exemples

Rappel de notation: $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Définition 3.1. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite.

- La **série de terme général** (a_k) est $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est la n**-ième somme partielle**. On a donc $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$.
- La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ existe $\in \mathbb{R}$. Elle **diverge** si elle ne converge pas.

Exemples:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Le terme général est $a_k = \frac{1}{2^k}$, et la n-ième somme partielle est $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.
Cette série converge: En effet
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) + 1 =$$
$$= \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1 - \underbrace{(\tfrac{1}{2})^{n+1}}_{\longrightarrow 0}) \longrightarrow 2.$$
où l'on a utilisé l'exercice $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$ et donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

2) **Série géométrique:** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \text{converge et vaut } \frac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1 \\ \text{diverge si } |q| \geq 1 \end{cases}$ (exercice).

3) La série $\sum_{k=0}^{\infty} 1$, de terme $a_k = 1$, et somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, diverge:
On a $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty \notin \mathbb{R}$. Même chose pour la série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ de terme $a_k = (-1)^k$: La suite des sommes partielles (S_n) diverge, donc la série aussi.

Proposition 3.1 (Série conv. $\Rightarrow$ terme $\longrightarrow 0$)**.** *Si* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge, alors* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Preuve. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\Leftrightarrow (S_n)$ converge $\Leftrightarrow (S_n)$ est de Cauchy. Donc

$$|S_n - S_{n-1}| \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right| = |a_n| \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Attention: L'autre direction $\Leftarrow$ n'est pas vraie en général!

4) **Série harmonique:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Le terme général est $a_k = \frac{1}{k}$. On a $a_k \longrightarrow 0$, et pourtant cette série diverge!

Preuve informelle.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots \geq \underbrace{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots}_{\to +\infty.}$$

$\square$

Preuve formelle. On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$|S_{2^{m+1}} - S_{2^m}| = \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} \left(2^{m+1} - 2^m\right) = \frac{2^m}{2^{m+1}}(2-1) = \frac{1}{2}.$$

Donc (S_n) n'est pas de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ (et donc aussi la série) divergent. $\square$

3.2 Critères de convergence pour les séries

Suite des exemples:

5) **Série harmonique alternée:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Cette série converge (vers $-\log(2)$, cf chapitre 5). Pour cela on a besoin de:

Proposition 3.2 (Critère de Leibnitz pour les séries alternées). *Si*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |a_{k+1}| \leq |a_k| \\ 2)\ \text{signe}(a_{k+1}) = -\text{signe}(a_k)\ \textit{(les signes}\ \text{alternent}), \end{array}\right\}\ \textit{(pour } k \textit{ assez grand)}$$

3) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$,

alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge.*

Idée de la preuve. Si $m > n$, $a_{n+1} \geq 0$ et $m - n$ est pair, alors

$$S_m - S_n = \underbrace{a_{n+1} + \overbrace{a_{n+2}}}_{\geq 0}{}^{\leq 0} + \underbrace{\overbrace{a_{n+3}} + \overbrace{a_{n+4}}}_{\geq 0}{}^{\leq 0} + a_{n+5} + \cdots + \overbrace{a_{m-2} + \underbrace{a_{m-1}}}^{\leq 0} + \overbrace{\underbrace{a_m}}^{\leq 0}{}_{\geq 0}$$

où les ≥ 0 et ≤ 0 proviennent du fait que les termes sont de plus en plus petits en valeur absolue, et que les signes alternent. Ainsi, $0 \leq S_m - S_n \leq a_{n+1}$, et en traitant les autres cas ($a_{n+1} \leq 0, m - n$ impair), on trouve

$$0 \leq |S_m - S_n| \leq |a_{n+1}| \longrightarrow 0.$$

Il suit que (S_n) est de Cauchy, donc elle converge (et la série aussi). $\square$

Retour à l'exemple 5: La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est de terme général $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$. On a

1) $|a_{k+1}| = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = |a_k|$,
2) $\text{signe}(a_{k+1}) = -\text{signe}(a_k)$,
3) $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Donc la série converge.

6) La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots$ converge. (Et vaut $\ldots \frac{\pi^2}{6}$!).

Preuve. En séparant les termes pairs et impairs, on trouve

$$\begin{aligned} S_n \leq S_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = 1 + \frac{2}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} S_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $S_n \leq 1 + \frac{1}{2}S_n \Rightarrow \frac{1}{2}S_n \leq 1 \Rightarrow S_n \leq 2$. La suite (S_n) est donc majorée et croissante, donc elle converge (tout comme la série). $\square$

Que dire alors des séries $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \ldots$?

Proposition 3.3 (Critère de comparaison, terme ≥ 0)**.** *Soient $(a_k), (b_k)$ deux suites telles que $0 \leq a_k \leq A_k$ (pour k assez grand). Alors*

1) $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *converge* $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge.*

2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverge* $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *diverge.*

Preuve. On pose $S_n^a = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $S_n^A = \sum_{k=0}^{n} A_k$.

1) (S_n^a) est croissante, et $S_n^a \leq S_n^A$ qui converge $\Rightarrow$ bornée. Donc S_n^a converge, par croissance majorée.
2) (S_n^a) est croissante et divergente, d'où $S_n^a \longrightarrow +\infty$. Ainsi $S_n^A \longrightarrow +\infty$ par le théorème du gendarme seul. $\square$

Conséquence: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge par comparaison. En effet, $0 \leq \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. En fait pour $p \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$ (Exercice).

Définition 3.2. Une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

Proposition 3.4. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série absolument convergente. On note S_n ses sommes partielles, et S_n^{abs} les sommes partielles de $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Alors,

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |S_m^{abs} - S_n^{abs}| \longrightarrow 0$$

car (S_m^{abs}) converge, et est donc de Cauchy. Donc (S_n) est aussi de Cauchy, et converge. □

Remarque 3.1.
- Si $a_k \geq 0$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente ⇔ absolument convergente.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente, mais pas absolument convergente: $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

<u>*Deux autres critères:*</u>

Proposition 3.5 (Critère de d'Alembert pour les séries)**.** *Soit (a_k) une suite telle que $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument (donc converge) si $\rho < 1$ et diverge si $\rho > 1$.*

Remarque 3.2.
- Attention: le critère ne se prononce pas si $\rho = 1$.
- Version plus générale: La série converge absolument si $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ et diverge si $\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$

Proposition 3.6 (Critère de Cauchy / de la racine)**.** *Soit (a_k) une suite telle que $\sigma = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument (donc converge) si $\sigma < 1$ et diverge si $\sigma > 1$.*

Remarque 3.3.
- Attention: le critère ne se prononce pas si $\sigma = 1$.
- Version plus générale: On remplace σ par $\sigma = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Exemple: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$. On a $a_k = \frac{2^k}{k!}$, et on utilise d'Alembert:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0.$$

Donc $\rho = 0 < 1$ et la série converge absolument.

3.3 Séries avec paramètre

Ce sont des séries où le terme général $a_k = f_k(x)$ dépend d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$. La convergence dépend donc aussi de $x \in \mathbb{R}$!

Exemples:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}$ (pour $x \in \mathbb{R}^*$). Le terme général est $a_k = \frac{k^2}{x^k}$. On utilise le critère de d'Alembert:
$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{|x|^{k+1}} \frac{|x|^k}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^k}{|x|^{k+1}} = \frac{1}{|x|}.$$
Donc la série converge absolument si $\rho < 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ et diverge si $\rho > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Et si $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$? On vérifie les deux cas individuellement: Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{1^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2$ diverge, car $k^2 \not\longrightarrow 0$, et si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2$ diverge, car $(-1)^k k^2 \not\longrightarrow 0$. En résumé, la série converge $\Leftrightarrow |x| > 1$.

Définition 3.3. Le **domaine de convergence** d'une série à paramètre x est
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ la série converge}\}.$$

On a donc $D\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (pour $x \in \mathbb{R}$). Si $x = 0$, la série vaut $0^0 + 0 = 1$ (et converge donc). Si $x \neq 0$, on utilise d'Alembert:
$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0.$$
La série converge donc absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $D = \mathbb{R}$. On verra plus tard que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Définition 3.4. Une **série entière** est une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$, pour $x \in \mathbb{R}$. Le nombre a est le **centre** de la série.

Exemple: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-0)^k$ est une série entière de centre 0. De même pour la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ avec $b_k = 0$ si k est impair, et $b_k = \frac{1}{k!}$ si k est pair. Par contre, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}$ n'en est pas une.

Théorème 3.7 (Convergence des séries entières)**.** *Soit* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$ *une série entière. Alors il existe un unique nombre* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ *appelé* ***rayon de convergence*** *de la série, tel que la série converge si* $|x-a| < r$ *et diverge si* $|x-a| > r$.

Idée de la preuve. Appliquer le critère de Cauchy (généralisé). □

Remarque 3.4. Les cas $|x-a| = r \Leftrightarrow= x = a \pm r$ sont à traiter individuellement. Donc $D\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k\right) =]a-r, a+r[$ ou $]a-r, a+r]$ ou $[a-r, a+r[$ ou $[a-r, a+r]$.

Exemple: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k \cdot 2^k}$. C'est une série entière avec $b_k = \frac{1}{k \cdot 2^k}$. On applique le critère de d'Alembert (attention: le terme vaut $a_k = \frac{(x-3)^k}{k \cdot 2^k}$)

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x-3| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k \cdot 2^k}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{|x-3|}{2}.$$

Ainsi la série converge absolument si $\rho < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2$, et diverge si $\rho > 1 \Leftrightarrow |x-3| > 2$. Le rayon de convergence vaut donc: $r = 2$.
On trouve donc $D \supseteq\ ]3-2, 3+2[\ =]1, 5[$, et il faut encore vérifier les cas $x = 1$ et $x = 5$. Pour $x = 5$, on trouve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5-3)^k}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ qui diverge (série harmonique), et pour $x = 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-3)^k}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ qui converge (série harmonique alternée). Donc $D = [1, 5[$.

Remarque 3.5.

- Le cas $r = +\infty$ est aussi possible, lorsque la série converge pour tout $x \in \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.
- Formules pour le rayon de convergence:

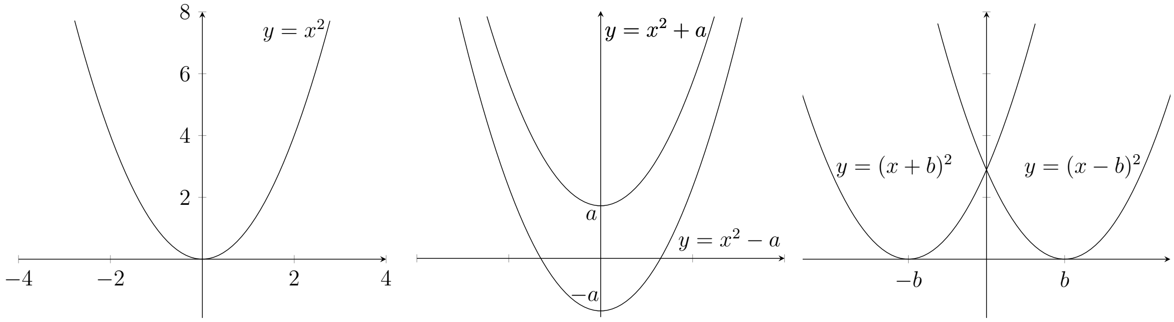
$$r = \lim_{k\to\infty} |b_k|^{-1/k} \quad \text{et} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|$$

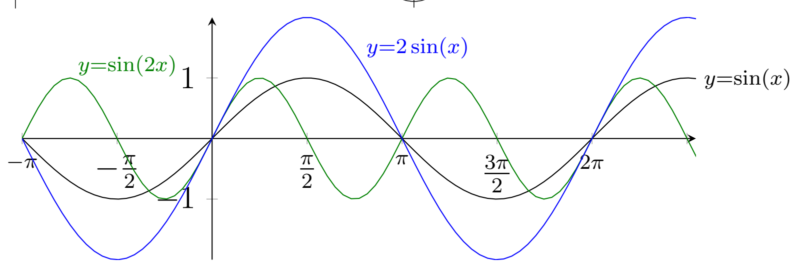
lorsque ces limites existent. (C'est l'inverse ($\frac{1}{\dots}$) des critères de Cauchy/de d'Alembert, mais appliqué à b_k et non à a_k).

Chapitre 4: Fonctions

4.1 Rappels

Fonction réelle = $f\colon D \to \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$. $D = D(f)$ = domaine = $\{x \mid f(x) \text{ est défini}\}$, $\operatorname{Im}(f)$ = image = $f(D)$. Le graphe d'une fonction est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.
Exemples:



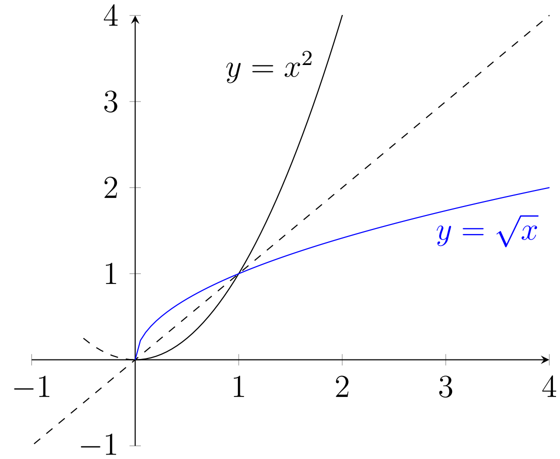


Propriétés: Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1) f est **croissante** (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) sur D si pour tous $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \le f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \ge f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). f est monotone (resp. strictement monotone) dur D si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.
2) f est **paire** (resp. impaire) si D est symétrique en 0 (i.e. $x \in D \Rightarrow -x \in D$) et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$). Exemple: x^2 est paire, x^3 est impaire.
3) f est T-**périodique** pour un $T > 0$ si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in D$. La **période fondamentale** est le plus petit T tel que f soit T-périodique (s'il existe). Exemple: $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sont 2π-périodiques, mais $\tan(x)$ est aussi π-périodique. Les périodes fondamentales sont 2π pour sin et π pour tan.
4) f est **majorée** (resp. minorée, bornée) sur $A \subseteq D$ si l'ensemble $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ est majoré (resp. minoré, borné). On a
$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f(A), \quad \inf_{x\in A} f(x) = \inf f(A)$$
et
$$\max_{x\in A} f(x) = \max f(A), \quad \min_{x\in A} f(x) = \min f(A)$$
lorsque ces quantités existent. Ex: $f(x) = (x-1)^2 + 2$, $A =]-1, 4[$. On a

$\inf\limits_{x\in A} f(x) = 2 = \min\limits_{x\in A} f(x), \sup\limits_{x\in A} f(x) = 11, \max\limits_{x\in A} f(x)$ n'existe pas.

5) On rappelle que $f\colon X \to Y$ est surjective (resp. injective, bijective) si tout $y \in Y$ a au moins (resp. au plus, exactement) une pré-image $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Si f est bijective, sa réciproque est la fonction $f^{-1}\colon Y \to X$ définie par $f^{-1}(y) =$ unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a donc $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$; il suit que son graphe s'obtient par symétrie de $f(x)$ en la droite $y = x$. Exemple:

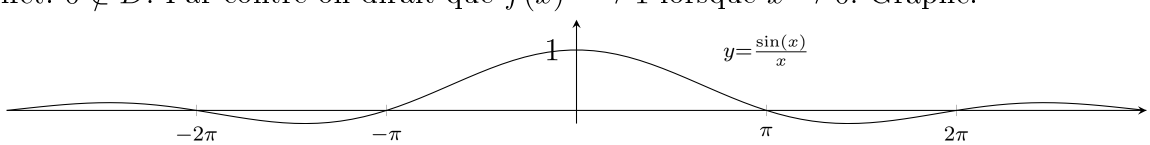


6) La **composée** de deux fonctions $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ est la fonction $\begin{array}{l} g \circ f\colon X \to Z \\ \qquad x \mapsto g\circ f(x) = g(f(x)) \end{array}$. Exemple: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ est la composée $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4(x)$ avec $f_4(x) = x^2, f_3(x) = x+1, f_2(x) = \sqrt[3]{x}, f_1(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque 4.1. g est la réciproque de $f \Leftrightarrow f\circ g(x) = x$ et $g \circ f(x) = x$.

4.2 Limites de fonctions

Exemple: $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. On a $D(f) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Que se passe-t-il en 0 ? Rien ! En effet: $0 \notin D$. Par contre on dirait que $f(x) \longrightarrow 1$ lorsque $x \to 0$. Graphe:



Idée: Formaliser ça. On aimerait dire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$. Ingrédients:

1) $f(x)$ doit être définie "un peu autour" de x_0, et
2) f doit s'approcher de ℓ lorsque x s'approche de x_0.

Définition 4.1. Une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ est **définie au voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$]x_0 - d, x_0[\ \cup\ ]x_0, x_0 + d[\ \subseteq D(f) \quad \text{pour un } d > 0.$$

Exemple: $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est définie au voisinage de 0 (on peut choisir n'importe quel $d > 0$), même si elle n'est pas définie en 0 !

Définition 4.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Alors f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite lorsque** x **tend vers** x_0, noté

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell,$$

si $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ on a $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Avec des mots: $f(x)$ est *arbitrairement proche* de ℓ dès que x est *assez proche* de x_0 (mais $\neq x_0$). Comparaison avec les suites: $a_n \longrightarrow a$ si a_n est *arbitrairement proche* de ℓ dès que n est *assez grand* (donc *assez proche* de l'infini).

Remarque 4.2.
- On va montrer plus tard que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
- Pour $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, on ne regarde jamais $f(x_0)$, mais seulement $f(x)$ pour x proche de x_0. Exemple:
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 132 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} g(x) \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$
malgré le fait que $g(0) = 132 \neq 1$.
- $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x}$ n'a pas de sens: $\sqrt{x}$ n'est pas défini au voisinage de -1.

Exemple: Soit $f(x) = 5x - 1$, et $x_0 = 2$. Montrons "à la main" que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, donc f est bien définie au voisinage de 2.
2) Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver $\delta > 0$ tel que, dès que $|x - 2| \leq \delta$ (et $x \neq 2$), on a $|f(x) - 9| \leq \varepsilon$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Alors, pour $x \neq 2$ tel que $|x - 2| \leq \delta$, on a
$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon \quad \text{car } \delta = \frac{\varepsilon}{5}.$$
Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta (= \varepsilon/5)$ tel que si $x \neq 2$ et $|x - 2| \leq \delta$, on a $|f(x) - 9| \leq \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$.

Heureusement, les suites viennent en aide pour simplifier les calculs:

Théorème 4.1 (Limites de fonctions et suites)**.** *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ pour **toute** suite $(a_n) \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.*

Idée: $a_n \longrightarrow x_0$ = manière de s'approcher de x_0. Donc $f(x) \longrightarrow \ell$ si $f(a_n) \longrightarrow \ell$ pour toute les façons (a_n) de s'approcher de x_0.

Exemple: Redémontrons que si $f(x) = 5x - 1$, alors $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$. Si (a_n) est une suite telle que $a_n \longrightarrow 2$, alors on a

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 5a_n - 1 \overset{(*)}{=} 5 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9,$$

où en $(*)$, on a utilisé les propriétés algébriques des limites (cf Chap 2.3). Comme c'est vrai pour toutes les suites (a_n) qui convergent vers 2, on a bien montré que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$.

Attention: "*Toute* suite" est important !

Corollaire 4.2. *Si*

- $\exists (a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ *tel que* $a_n \longrightarrow x_0$ *mais* $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ *n'existe pas, ou*
- $\exists (a_n), (b_n) \subseteq D\setminus\{x_0\}$ *tel que* $a_n \longrightarrow x_0$ *et* $b_n \longrightarrow x_0$ *mais* $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$,

alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas.*

Exemple: $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. On a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc f est définie au voisinage de 0. On pose $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, de sorte que $a_n \longrightarrow 0$ et $b_n \longrightarrow 0$. Mais $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(2\pi n + \pi) = -1$. Donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Remarque 4.3. On pourrait aussi prendre $c_n = \frac{1}{\pi n} \longrightarrow 0$. On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(\pi n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ qui n'existe pas. Donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas non plus.

Propriétés des limites de fonctions. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de x_0 et telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existent. Alors

1) Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} pf(x) + qg(x) = p \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + q \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$.
3) Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.
4) Si $f(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
5) Si $h\colon D \to \mathbb{R}$ est tel que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* x_0 et que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell$.

Preuve. Utiliser les suites (point 1) fait en cours). □

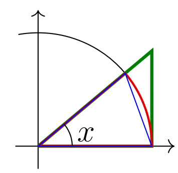
Remarque 4.4. En utilisant les suites, on peut également montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$ (unicité de la limite).

4.3 Calculs de limites

0) $\lim\limits_{x\to u} c = c$, $\lim\limits_{x\to u} x = u$. En effet, si $f(x) = c$ et $g(x) = x$, alors pour toute suite $a_n \longrightarrow u$, on a $f(a_n) = c \longrightarrow c$ et $g(a_n) = a_n \longrightarrow u$. Donc $\lim\limits_{x\to u} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x\to u} g(x) = u$.
1) Polynômes: $\lim\limits_{x\to u} x^2 = \left(\lim\limits_{x\to u} x\right)^2 = u^2$ par le produit des limites. Par récurrence, on trouve $\lim\limits_{x\to u} x^n = u^n$, et en utilisant la linéarité, on voit que si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, alors $\lim\limits_{x\to u} P(x) = P(u)$.

2) Fonctions rationnelles: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec P, Q des polynômes. Si $Q(u) \neq 0$, on a $\lim_{x\to u} Q(x) = Q(u) \neq 0$, et on peut appliquer la propriété du quotient des limites pour trouver $\lim_{x\to u} f(x) = \dfrac{\lim_{x\to u} P(x)}{\lim_{x\to u} Q(x)} = \dfrac{P(u)}{Q(u)}$. Exemple: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-1}{3x^2+4} = \dfrac{1}{16}$.

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$. En calculant les aires des figures colorées ci-contre, on trouve que $\dfrac{\sin(x)}{2} \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\tan(x)}{2}$. En divisant par $x/2$, on trouve $\dfrac{\sin(x)}{x} \leq 1 \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \dfrac{1}{\cos(x)}$. En multipliant l'inégalité de droite par $\cos(x)$, on trouve $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$.



Finalement, comme $\cos(x) \in [0,1]$, on a $\cos(x) \leq \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leq 1 - x^2$. On obtient alors la chaine d'inégalités suivantes (qui est vraie pour $0 < x < \pi/2$, donc aussi pour $-\pi/2 < x < 0$ car ce sont des fonctions paires):

$$\underbrace{1 - x^2}_{\longrightarrow 1} \leq \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{1}_{\longrightarrow 1}$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ par le théorème des deux gendarmes.

Proposition 4.3 (Limites de composées)**.** *Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to \mathbb{R}$ telles que*
1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$, 2) $\lim_{x\to b} g(x) = c$ et 3) $f(x) \neq b$ au voisinage de a.
Alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = c$.

Preuve. On utilise la caractérisation avec les suites (Théorème 4.1). Soit $(x_n)_n \subset A \backslash \{a\}$ telle que $x_n \to a$. On pose $y_n = f(x_n)$. Alors $y_n \longrightarrow b$ par 1), et $y_n \neq b$ par 3). Donc $(y_n)_n \subset B \setminus \{b\}$, d'où $g(f(x_n)) = g(y_n) \longrightarrow c$ par 2). $\square$

Exemples:

- $\lim_{x\to 1} \cos(x^{12} - 1) = \lim_{x\to 1} g(f(x))$ où $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = x^{12} - 1$. On a 1) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^{12} - 1) = 0$, 2) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, et 3) $x^{12} - 1 \neq 0$ dès que $x \neq \pm 1$, donc $x^{12} - 1 \neq 0$ au voisinage de 1. Ainsi $\lim_{x\to 1} \cos(x^{12} - 1) \overset{y = x^{12}-1}{=} \lim_{y\to 0} \cos(y) = 1$.

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2(x)}{3x^2 + \sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)/x^2}{(3x^2 + \sin^2(x)/x^2)} = \dfrac{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2} = \lim_{y\to 1} \dfrac{y}{3+y} = \dfrac{1}{4}$, où l'on a fait le changement de variables $y = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$; on a $y \to 1$ lorsque $x \to 0$.

- Attention: La condition 3) est importante: Si $f(x) = 3$ et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3, \end{cases}$

alors $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(3) = 0 \neq \lim_{y\to 3} g(y) = 2$. On ne peut donc pas faire le changement de variables $y = f(x)$.

Proposition 4.4 (Limites de réciproques)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Soit $u \in [a,b]$ et $v = f(u)$. Alors $f\colon [a,b] \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective, et si $f^{-1}\colon \mathrm{Im}(f) \to [a,b]$ est définie au voisinage de v, on a $\lim_{x\to v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = u$.*

Corollaire 4.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $v \geq 0$, on a $\lim_{x\to v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$.*

Preuve. On considère $f(x) = x^n$ qui est strictement croissante sur $[0,a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\lim_{x\to v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$ pour tout $v \geq 0$. □

4.4 Limites à gauche/droite, limites (vers l')infini(es)

On généralise $\lim_{x\to u} f(x) = \ell$ en 1) $\lim_{x\downarrow u}$ et $\lim_{x\uparrow u}$, 2) $\lim_{x\to\pm\infty}$ et 3) $\lim f(x) = \pm\infty$.

Définition 4.3. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage $\begin{matrix}\text{à gauche}\\ \text{à droite}\end{matrix}$ de $u \in \mathbb{R}$ (c'est à dire $\begin{matrix}]u-d,u[\subseteq D\\ ]u,u+d[\subseteq D\end{matrix}$ pour un $d > 0$). Alors f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite** $\begin{matrix}\textbf{à gauche}\\ \textbf{à droite}\end{matrix}$ **lorsque** x **tend vers** u, si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D \setminus \{u\}, \text{ on a } \begin{matrix} x \in [u-\delta,u[\\ x \in]u,u+\delta] \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation:

- Limite à gauche: $\lim_{x\uparrow u} f(x) = \lim_{x\to u^-} f(x) = \ell$.
- Limite à droite: $\lim_{x\downarrow u} f(x) = \lim_{x\to u^+} f(x) = \ell$.

Version avec les suites: Pour toute suite $(x_n) \subset D\setminus\{u\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ et $\begin{matrix} x_n < u \\ x_n > u, \end{matrix}$ on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Exemple: Si $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, alors $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Donc $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} -1 = -1$ et $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} 1 = 1$.

Proposition 4.6. *Si f est définie au voisinage de u, alors $\lim_{x\to u} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\uparrow u} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\downarrow u} f(x) = \ell$.*

Preuve. Exercice. □

Remarque 4.5. Cela montre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas (limites à gauche et à droite ne sont pas égales).

Définition 4.4. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ (c'est à dire $\begin{matrix}]a,+\infty[\ \subseteq D \\ ]-\infty,a[\subseteq D \end{matrix}$ pour un $a \in \mathbb{R}$). Alors f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **comme limite lorsque** x **tend vers** $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in D \text{ on a } \begin{matrix} x \geq C \\ x \leq C \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, ou $f(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ell$. Version avec les suites: Pour toute suite $(x_n) \subset D$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty, \end{matrix}$ on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Exemple: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $C = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x \geq C$, on a $|\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{C} \leq \varepsilon$.

Remarque 4.6. On a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x)$ possède une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$.

Définition 4.5. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ déf. au voisinage de $u{\in}\mathbb{R}$. Alors $f(x)$ **tend vers** $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ **lorsque** x **tend vers** u si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D \setminus \{u\} \text{ on a } |x - u| \leq \delta \Rightarrow \begin{matrix} f(x) \geq A \\ f(x) \leq A. \end{matrix}$$

Notation: $\lim_{x\to u} f(x) = \pm\infty$, ou $f(x) \overset{x\to u}{\longrightarrow} \pm\infty$. Version avec les suites: Pour toute suite $(x_n) \subset D$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty. \end{matrix}$

Exemple: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, et posons $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Alors, dès que $|x - 0| \leq \delta$, on a $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} \geq A$, car $\frac{1}{\delta^2} \geq A \Leftrightarrow \delta^2 \geq \frac{1}{A}$.

Remarque 4.7.

- On peut combiner 1), 2), 3): Par exemple, on a $\lim_{x\downarrow 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\uparrow 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} 3x - 1 = +\infty$.
- On a $\lim_{x\to u^\pm} = \pm\infty \Leftrightarrow f(x)$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = u$.
- Les propriétés algébriques, ainsi que le théorème des deux gendarmes, des composées et des réciproques restent valables pour ces limites généralisées.
- Finalement, les résultats valables pour les suites ($+\infty + \infty = +\infty, -\infty - \infty = -\infty, \pm\infty + c = \pm\infty$, théorème du gendarme seul, $\infty(\pm\infty) = \pm\infty, \frac{c}{\pm\infty} = 0$) restent valables pour les limites infinies. Attention: $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty$ sont toujours des formes indéterminées !

4.5 Fonctions continues

Définition 4.6. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ déf. au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue en** u si $\lim_{x\to u} f(x) = f(u)$.

Remarque 4.8. Cela implique 3 choses: 1) $u \in D$, 2) la limite existe et 3) elle vaut $f(u)$.

Exemples: Polynômes, fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x), \arctan(x)$ $e^x, \log(x), \ldots$ sont continues en tout point de leurs domaines (Exercice).

Remarque 4.9. Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$, et $a_n \longrightarrow u$, alors

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(u).$$

Exemple: $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n}) = \sin(0) = 0$.

Définition 4.7. Soit f définie au voisinage $\begin{array}{c}\text{à gauche}\\ \text{à droite}\end{array}$ de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue** $\begin{array}{c}\textbf{à gauche}\\ \textbf{à droite}\end{array}$ **en** u si $\begin{array}{c}\lim_{x\uparrow u} f(x)\\ \lim_{x\downarrow u} f(x)\end{array} = f(u)$.

Remarque 4.10. f est continue en $u \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en u.

Exemple: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$ $\Rightarrow f$ continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$, on a $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} 2x+1 = 1$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, et f est continue en $x = 0$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues: si f, g sont continues en u, alors $f+g$, $f\cdot g$, $\alpha f + \beta g$, $\dfrac{f}{g}$ (si $g(u) \neq 0$) sont également continues en u. De plus, si f est continue en u et g est continue en $f(u)$, alors $g \circ f$ est continue en u.

Exemple: $f(x) = \dfrac{\sin(x^2+8x+1)}{\sqrt{x^2+5+\cos(x)}}$ est continue en tout $u \in D(f) = \mathbb{R}$.

Définition 4.8 (Prolongements par continuité)**.** Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$, avec $u \notin D$ et est telle que $\lim_{x\to u} f(x) = \ell$, alors le **prolongement par continuité** de f en u est

$$\begin{aligned} \hat{f}\colon D \cup \{u\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = u. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 4.11. $\hat{f}\colon D \cup \{u\} \to \mathbb{R}$ est l'unique fonction continue telle que $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \neq u$, et $\hat{f}(u) = \ell$. Donc $\hat{f}$ est continue en u.

Exemple: Si $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^*$, alors $\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f. (Cette fonction s'appelle parfois $\text{sinc}(x)$).

Contre-exemple: La fonction $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de prolongement par continuité en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas).

Fonctions continues sur un intervalle:

Définition 4.9. Une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est **continue** (jusqu'au bord) si

1) $\lim\limits_{x\to u} f(x) = f(u)$ pour tout $u \in \,]a,b[\quad$ (f continue en tout $u \in \,]a,b[$),
2) $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) = f(a)\quad$ (f est continue à droite en a),
3) $\lim\limits_{x\uparrow b} f(x) = f(b)\quad$ (f est continue à gauche en b).

De manière analogue:

- $f\colon [a,b[\, \to \mathbb{R}$ est **continue** si 1) et 2) sont vérifiées.
- $f\colon\,]a,b] \to \mathbb{R}$ est **continue** si 1) et 3) sont vérifiées.
- $f\colon\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ est **continue** si 1) est vérifiée.

Théorème 4.7 (Théorème de la valeur intermédiaire, TVI)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord). Alors*

$$f([a,b]) = \Big[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x) \Big].$$

Remarque 4.12. Cela veut dire que f atteint

- son inf, donc l'inf est un min: $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}\quad$ (et $\neq -\infty$),
- son sup, donc le sup est un max: $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}\quad$ (et $\neq +\infty$),
- toutes les valeurs entre les deux !

De plus, $f([a,b])$ est donc un intervalle fermé.

Exemple d'application: L'équation $\cos(x) = x$ a une solution $x \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$. En effet, on définit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0, \tfrac{\pi}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos(x) - x. \end{aligned}$$

Cette fonction est continue (jusqu'au bord), et on remarque que $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$. Ainsi par le TVI, on a

$$f([0, \tfrac{\pi}{2}]) = [\underbrace{\min}_{<0}, \underbrace{\max}_{>0}] \ni 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \text{ tel que } f(x_0) = 0.$$

Comme $f(0) \neq 0 \neq f(\frac{\pi}{2}), x_0 \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$, et comme $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(x_0) = x_0$, on a trouvé une solution de l'équation.

Idée de preuve du TVI. Vue en cours. □

Corollaire 4.8. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (où l'inverse !) alors il existe $u \in \,]a,b[$ tel que $f(u) = 0$.*

Preuve. Voir exemple avec $\cos(x) - x$. □

Corollaire 4.9. *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue avec $I =$ intervalle ($= [a,b]$, ou $[a,b[$, ou $]-\infty,b]$, ...) alors $\mathrm{Im}(f) = f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire 4.10. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective $\Leftrightarrow$ f est strictement monotone.*

Preuve. Pour $\Leftarrow$, si $x_1 \neq x_2$, on a soit $x_1 < x_2$, soit $x_1 > x_2$, d'où $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$, ce qui implique que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Pour $\Rightarrow$, supposons que f n'est pas strictement monotone. Il existe donc $u, v, w \in [a,b]$ tels que $u < v < w$, mais $f(u) < f(v) > f(w)$ (ou la même chose en échangeant $<$ avec $>$). Soit alors $y \in \,]\max\{f(u), f(w)\}, f(v)[$. En appliquant le TVI à $f|_{[u,v]}$ et a $f|_{[v,w]}$, on trouve deux éléments $x_1 \in \,]u,v[$ et $x_2 \in \,]v,w[$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Comme on a nécessairement $x_1 < x_2$, f n'est pas injective. $\square$

Chapitre 5: Dérivées

5.1 Définition et exemples

Idée: Calculer la pente de la tangente au graphe d'une courbe.

Définition 5.1. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D$. Alors f est **dérivable** (ou **différentiable**) en x_0 si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} f'(x_0) \quad \text{existe} \ \in \mathbb{R}.$$

Notations:

- $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = D_x f(x_0) = \dot{f}(x_0) = \cdots$
- $f'(x_0)$ est la **dérivée** de f en x_0.
- f est **dérivable** si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1.

- $f'(x_0) =$ pente de la tangente au graphe de f, au point $(x_0, f(x_0))$.
- En faisant la substitution $x = x_0 + h$, on trouve la définition équivalente
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Définition 5.2. La **fonction dérivée** d'une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} f\colon D(f') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

On a $D(f') = \{x \in D \mid f \text{ est dérivable en } x\}$.

Exemples:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x_0+h)^2 - x_0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2hx0 + h^2}{h} = 2x_0$.
2) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0), \end{aligned}$$
où l'on a utilisé que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ et les inégalités $1 - h^2 \leq \cos(h) \leq 1 \Rightarrow -h = \frac{1-h^2-1}{h} \leq \frac{\cos(h)-1}{h} \leq 0$, d'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$, cf Chapitre 4, section 3.
On montre d'une manière analogue que la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.

Proposition 5.1. *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.*

1) *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*
2) *f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$, où ε est une fonction telle que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*

Remarque 5.2. Avec des mots, 2) est: $f(x) =$ droite + reste qui $\longrightarrow 0$ plus vite que $x - x_0$.

Preuve. 1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) + f(x_0) = f(x_0)$.

2) Esquisse vue en classe.

□

Remarque 5.3. f continue $\not\Rightarrow$ f dérivable. Exemple: Si $f(x) = |x|$, alors f est continue (partout, donc) en 0, mais on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Ainsi la limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ n'existe pas, et f n'est donc pas dérivable en 0.

Proposition 5.2 (Opérations algébriques sur les dérivées)**.** *Soient $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ dérivables en x_0.*

1) *$(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = pf'(x_0) + qg'(x_0)$ pour tous $p, q \in \mathbb{R}$.*
2) *$(f \cdot g)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0)$*
3) *$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\dfrac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x_0)$.*

Preuve. Exercice. □

Dérivées de fonctions usuelles.

0) $f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$ (la pente est nulle!)
1) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Preuve. Par récurrence. Init: $(n = 1)$: $f(x) = x$, d'où $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h) - x}{h} = 1$. Pas de récurrence: Si $f(x) = x^{n+1} = xx^n$, on trouve, en utilisant la règle du produit: $f'(x) = (xx^n)' = 1 \cdot x^n + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$. □
2) $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. Pour $\tan(x)$, on utilise la règle du quotient pour trouver: $\tan'(x)' = \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \dfrac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} =$
   $= \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, ou bien $1 + \tan^2(x)$.
3) $f(x) = x^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$. On écrit $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ puis on utilise la règle du quotient pour trouver $f'(x) = (-n)x^{-n-1}$.

Proposition 5.3 (Dérivée de composée)**.** *Soient $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to \mathbb{R}$, avec f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.*

Preuve. On écrit $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Le second quotient tend vers $f'(x_0)$ lorsque $x \to x_0$, et le premier vaut $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ (changement de variables $y = f(x), y_0 = f(x_0)$) qui tend vers $g'(y_0)$ lorsque $x \to x_0 \Rightarrow y \to y_0$. □

Proposition 5.4 (Dérivée des réciproques)**.** *Soit $f\colon I \to J$ bijective et dérivable sur tout I = intervalle ouvert. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ pour tout $x \in J$.*

Preuve. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B. On dérive l'équation $x = f(f^{-1}(x))$ des deux côtés pour trouver $1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)$, d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. □

Exemples:

- $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ où $f(x) = x^n$. (On suppose $x > 0$). Donc $(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. On montre de manière analogue que $(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$, et on verra que $(x^u)' = ux^{u-1}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (et $x > 0$).
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ pour $x \in]-1,1[$. Comme $\alpha = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(\alpha) \geq 0$, donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$ et ainsi $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$. Il suit: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 5.3. $\lim\limits_{\substack{h\downarrow 0\\ h\uparrow 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = dérivée **à droite** / **à gauche** de f en x_0.

Proposition 5.5. *f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à gauche et à droite en x_0,* et *les valeurs sont égales.*

Exemples:

- $f(x) = |x|$. En $x = 0$, la dérivée à droite vaut 1, et la dérivée à gauche vaut -1. Donc $f'(0)$ n'existe pas.
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$. La dérivée n'existe pas en 0 (elle vaut $+\infty$). Détails vus en classe.

Définition 5.4. La **dérivée seconde** de f est: $f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$. La **dérivée d'ordre** n est $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$. Autre notation: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f$.

Définition 5.5. Soit $I =]a,b[$. Alors:

$$\mathcal{D}^n(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}, \text{ et}$$
$$\mathcal{C}^n(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(n)} \text{ est continue}\}.$$

On définit également $\mathcal{C}^\infty(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque 5.4.
- On a $\mathcal{C}^0(I) = \{\text{fonctions continues } f\colon I \to \mathbb{R}\}$.
- Comme toute fonction dérivable est continue, on a
$$\mathcal{C}^0 \supseteq \mathcal{D}^1 \supseteq \mathcal{C}^1 \supseteq \mathcal{D}^2 \supseteq \mathcal{C}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{D}^n \supseteq \mathcal{C}^n \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^\infty.$$

Exemples:
- ($\mathcal{C}^1 \supsetneq \mathcal{D}^2$): La fonction $f(x) = x|x|$ est dérivable, de dérivée $f'(x) = 2|x|$ continue, donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Mais f' n'est pas dérivable en 0, d'où $f \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ (même si $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, 0[)$ et $\in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$).

  Remarque 5.5. De manière analogue, $f(x) = x^n|x|$ est dans $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R})$.
- ($\mathcal{D}^1 \supsetneq \mathcal{C}^1$). Soit $f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, prolongée par continuité en 0 via: $f(0) = 0$. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, 0[) \cap \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ et on calcule:
$$f'(x) = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + x^2(-\sin(x))\tfrac{-1}{x^2} = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + \sin(\tfrac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0.$$
  En $x = 0$, on a
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cos(\frac{1}{h})}{h} = 0.$$
  Donc f est dérivable en 0, et donc partout: $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$. Sa dérivée est:
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$
  En revanche, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas. Donc f' n'est pas continue en 0. Ainsi $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, même si $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.

5.2 Dérivée et croissance

Théorème 5.6 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u) = 0$.*

Preuve. Par le TVI, f atteint $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, qu'on suppose > 0 (si $M \leq 0$, on remplace par le min). Il existe donc $u \in]a,b[$ tel que $f(u) = M$. On a alors
$$f'(u) = \lim_{x\downarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \lim_{x\downarrow u} \frac{f(x) - M}{x - u} = \lim_{x\downarrow u} \frac{\leq 0}{\geq 0} \quad \leq 0 \text{ et}$$
$$f'(u) = \lim_{x\uparrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \lim_{x\uparrow u} \frac{f(x) - M}{x - u} = \lim_{x\uparrow u} \frac{\leq 0}{\leq 0} \quad \geq 0.$$
Donc $f'(u) = 0$. □

Théorème 5.7 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Preuve. Application directe du théorème de Rolle, cf Exercices. □

Applications du Théorème des Accroissements finis: Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord) et dérivable sur $]a,b[$.

1) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \text{constante}$. En effet, $\Leftarrow$ est claire, et pour $\Rightarrow$, si $f \neq$ constante, on trouve $c < d$ tel que $f(c) \neq f(d)$. Le TAF donne alors $u \in \,]c,d[$ tel que $f'(u) = \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c} \neq 0$.
2) Si $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a,b[$, et si on a $f'(x) = g'(x)$, alors $f(x) = g(x) + C$. En effet, il suffit d'appliquer le 1) à $f - g$.
3) $\begin{matrix} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{matrix} \;\forall x \in \,]a,b[\quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est } \begin{matrix}\text{croissante}\\ \text{décroissante}\end{matrix} \text{ sur } [a,b].$
(Preuve de la première ligne vue en classe.)
4) $\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix} \;\forall x \in \,]a,b[\quad \Rightarrow \quad f \text{ est } \begin{matrix}\text{strictement croissante}\\ \text{strictement décroissante}\end{matrix} \text{ sur } [a,b].$

Remarque 5.6. Attention, $\Leftarrow$ du 4) est faux en général. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, donc f' n'est pas > 0 sur $\mathbb{R}$.

Définition de la fonction exponentielle (et logarithme):

Théorème 5.8. *Il existe une unique fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.*

Preuve. Existence: plus tard ! Unicité: 2 étapes:
1) *La fonction f vérifie: $f(x) \neq 0\,\forall x \in \mathbb{R}$.* On pose $h(x) = f(x)f(-x)$. On calcule: $h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = 0$, donc h est constante. Comme $h(0) = 1 \cdot 1$, on trouve $h(x) = f(x)f(-x) = 1$, d'où $f(x) \neq 0$.
2) *Unicité.* Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une (autre) fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$, alors on pose $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ (bien définie par l'étape 1). On calcule $h'(x) = \dfrac{g'f - f'g}{f^2} = \dfrac{gf - fg}{f^2} = 0$, donc h est constante. Comme $h(0) = \frac{1}{1}$, on trouve $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow g(x) = f(x)$. □

Définition 5.6. Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, notée $\exp(x)$ (et e^x plus tard).

Propriétés de $\exp(x)$*:*
1) $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ (découle de la définition). Donc $\exp \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2) $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (cf preuve !)
3) exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, exp est continue et $\neq 0$, donc > 0 ou < 0. Comme $\exp(0) = 1$, on a $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
4) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En effet, fixons $y \in \mathbb{R}$ et posons $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. Alors $g'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$ et $g(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$. Par unicité, il suit $g(x) = \exp(x) \Leftrightarrow \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x) \Leftrightarrow \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. En effet, la seconde limite découlera de la première (changement de variable $y = -x$), et pour la première, on pose

$g(x) = \exp(x) - x$. On a alors $g'(x) = \exp(x) - 1 > 0$ si $x > 0$ car exp est strictement croissante. Ainsi, dès que $x > 0$, g est strictement croissante et donc $\exp(x) > x \longrightarrow +\infty$.

6) $\exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818\ldots$; en fait, on a $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (cf exercices).
Il suit que $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\cdot\exp(1) = e\cdot e = e^2$, et par récurrence que $\exp(n) = e^n$. En prenant les quotients, on montre que $\exp(-n) = e^{-n}$, puis les racines, que $\exp(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}}$.

Définition 5.7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x)$.

Remarque 5.7. $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est strictement croissante, donc injective. La propriété 5) montre qu'elle est surjective (sur $]0,+\infty[$). Elle est donc bijective !

Définition 5.8. Le **logarithme** est la réciproque de exp:

$$\begin{aligned} \log\colon\ ]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) \quad (= \ln(x), \text{ autre notation}). \end{aligned}$$

Propriétés de $\exp(x)$*:*

1) $D(\log) =]0,+\infty[$ et $\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}$. De plus, $\log(1) = 0$, $\log \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$ et on a $x = \exp(\log(x)) \Rightarrow 1 = \exp'(\log(x))\log'(x) = x\log'(x) \Rightarrow \log'(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 0$.
2) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. (Prendre exp des deux côtés !)
3) log est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\downarrow 0} \log(x) = -\infty$. (Changement de variables $x = e^y$.)

Autres bases:

Définition 5.9. Pour $a > 0$, l'**exponentielle en base** a est

$$\begin{aligned} \exp_a\colon \mathbb{R} &\longrightarrow]0,+\infty[\\ x &\longmapsto a^x = \exp_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a)\cdot x). \end{aligned}$$

Pour $a > 0$,$a \neq 1$, **le logarithme en base** a est la réciproque de $\exp_a$:

$$\begin{aligned} \log_a\colon]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{(exercice facile).} \end{aligned}$$

Propriétés (cf exercices) :

- $(a^x)' = \log(a)a^x$, et $\log_a'(x) = \frac{1}{\log_a(x)x}$.
- a^x est strictement croissante (décroissante) si $a > 1$ ($a < 1$).
- $\log_a(b^x) = x\log_a(b)$.
- Changement de base: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

Remarque 5.8. Pour $u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a donc $x^u = \exp(\log(x)u)$, et donc $(x^u)' = \exp(\log(x)u)\frac{u}{x} = ux^{u-1}$.

Définition 5.10 (Fonctions trigo hyperboliques)**.**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Remarque 5.9. Comme pour les définitions de sin et cos, mais sans i.

Propriétés (cf exercices) :

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
- $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, de réciproque $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.
- $\cosh\colon [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est bij., de réciproque $\operatorname{arccosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$.

Théorème 5.9 (Règle de Bernoulli-L'Hospital (BH))**.** *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $A =]x_0 - d, x_0[\cup]x_0, x_0 + d[$ *un voisinage de* x_0. *Soient* $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ *avec* $A \subseteq D$. *Si*

1) f, g *sont dérivables sur* A *et* $g'(x) \neq 0$ *pour* $x \in A$.
2) "$\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$",
3) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Alors $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

Preuve. Utilise le Théorème des accroissements finis généralisé (Exercice). □

Remarque 5.10. Marche aussi avec $\lim_{x\downarrow x_0}$, $\lim_{x\uparrow x_0}$, $\lim_{x\to\pm\infty}$.

Exemples:

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \overset{BH}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$.
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{\log(x)} \overset{BH}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{px^{p-1}}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} px^p = +\infty$ si $p > 0$, et $= 0$ si $p \leq 0$. Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme.
- $\lim_{x\to 0} \cos(2x)^{3/x^2} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\log(\cos(2x))\dfrac{3}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{3\log(\cos(2x))}{x^2}\right)$ par continuité de exp. En appliquant Bernoulli-L'Hospital à la limite intérieure, on trouve $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\log(\cos(2sx))}{x^2} = 3 \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{-2}{\cos(2x)} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = -6$, donc la limite initiale vaut e^{-6}.

Remarque 5.11. Attention: si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors BH ne marche pas. Par exemple, $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$ (en utilisant les deux gendarmes) mais $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x} \overset{BH}{\neq} \lim_{x\to 0} \dfrac{2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1}$ n'existe pas.

Exemples (déssinables et non-déssinables) de fonctions vus en cours.

Proposition 5.10. *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in D$, et dérivable au voisinage de x_0 (mais pas nécessairement en x_0). Si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (limite existe dans $\mathbb{R}$), alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.*

Preuve. Utiliser Bernoulli-L'Hospital ! □

Remarque 5.12.
- L'autre direction de la proposition est fausse: la fonction $f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x})$ (prolongée par continuité en 0) est dérivable en 0 (on a $f'(0) = 0$, voir exemple à la fin de la section 5.1) bien que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.
- La proposition reste vraie en remplaçant $\lim\limits_{x\to x_0}$ par $\lim\limits_{x\downarrow x_0}$ (resp. $\lim\limits_{x\uparrow x_0}$) et "dérivable" par "dérivable à droite (resp. à gauche)".

5.3 Études de fonctions

Toute cette section est résumée dans le tableau "Relation entre fonction et dérivées" disponible sur moodle.

$f\colon I \to \mathbb{R}, I =]a,b[$	f' existe sur I ($f \in \mathcal{D}^1(I)$)	f'' existe sur I ($f \in \mathcal{D}^2(I)$)
f croissante sur I: $\forall x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$	$f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$	—
f est **convexe** sur I: $\forall x_1 < x_2$ le graphe de f est *en dessous* du segment $[(x1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))]$	f' est croissante sur I	$f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$.

Définition 5.11. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Alors
- f admet un **maximum** / **minimum** **local** en $x_0 \in D$ si $f(x_0) \geq f(x)$ / $f(x_0) \leq f(x)$ pour x dans un voisinage de x_0.
- f admet un **maximum** / **minimum** **global** en $x_0 \in D$ si $f(x_0) = \max\limits_{x\in D} f(x)$ / $f(x_0) = \min\limits_{x\in D} f(x)$.
- un **extremum** de f est un min ou un max de f.

$f\colon I \to \mathbb{R}, I =]a,b[$	f' existe sur I et continue en x_0	f'' existe sur I et continue en x_0
f a un max local en x_0	$f'(x) = 0$ et f' passe de $+$ à $-$ en $x_0 \Leftrightarrow f'$ *décroît* autour de x_0	$f''(x) \leq 0$ autour de $x_0 \Leftarrow f''(x_0) < 0$.
f a un min local en x_0	$f'(x) = 0$ et f' passe de $-$ à $+$ en $x_0 \Leftrightarrow f'$ *croît* autour de x_0	$f''(x) \geq 0$ autour de $x_0 \Leftarrow f''(x_0) > 0$.
f a un point d'inflexion en $x_0 \Leftrightarrow f$ change de convexité/concavité en x_0	f' a un max local ou min local en x_0	$f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0.

Définition 5.12. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Alors f admet un **point stationnaire** en x_0 si $f'(x_0) = 0$.

Recherche d'extrema globaux: Soir $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors les extrema (globaux) de f sont éléments de

(i) $\{x_0 \in]a, b[\mid f'(x_0) = 0\}$ (points stationnaires)
(ii) $\{x_0 \in]a, b[\mid f'(x_0) \text{ n'existe pas}\}$
(iii) $\{a, b\}$ les bords.

5.4 Développements limités

Idée: Approximations de fonctions par des polynômes (ex: $\sin(x) \approx x$ et $\cos(x) \approx 1$ pour x proche de 0) mais *en gardant le contrôle sur l'erreur !*

Définition 5.13 (DL en 0)**.** Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ avec $I =]-d, d[\subseteq D$ (f est définie au voisinage I de 0, et en 0). Alors f admet un **développement limité d'ordre** $n \in \mathbb{N}$ **en** 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I$, on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$$

Donc autour de 0, f = polynôme de degré $\le n$ + reste qui $\longrightarrow 0$ plus vite que x^n.

Remarque 5.13. Condition équivalente: $a_0 = f(0)$ et

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + x_n x^n)}{x^n} \longrightarrow 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exemple: $f(x) = \sin(x)$ admet un DL_1 en 0. En effet, on pose $a_0 = 0 = \sin(0)$ et $a_1 = 1$, et on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{x^1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} - 1 = 0.$$

Donc $\sin(x) = x + x^1 \varepsilon(x)$.
On verra que $\sin(x)$ admet un DL_3 en 0 donné par $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$ ce qui est très utile pour calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$ (détails vus en classe).

Définition 5.14. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ avec $I =]x_0 - d, x_0 + d[\subseteq D$ (f est définie au voisinage I de x_0, et en x_0). Alors f admet un **développement limité d'ordre** $n \in \mathbb{N}$ **en/autour de** x_0 si $f(x + x_0)$ admet un DL d'ordre n en 0 $\Leftrightarrow$ $f(x + x_0) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \underbrace{\varepsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \tilde{\varepsilon}(x)$$

où $\tilde{\varepsilon}\colon I \to \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon(x_0) = 0 = \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x)$.

Proposition 5.11. *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1) Si f admet un DL en x_0, alors , alors il est unique.
2) f admet un DL_0 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue en x_0.

3) f admet un DL_1 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0.

Preuve. Vue en classe. □

Exemple: $f(x) = |x|$.
(i) $f(x) = |x|$ admet un DL_0 en 0, car $|x|$ est continue en 0.
(ii) $f(x) = |x|$ n'admet par de DL_1 en 0, car $|x|$ n'est pas dérivable en 0.
(iii) $f(x) = |x|$ n'admet par de DL_n en 0, pour tout $n \geq 1$. Sinon, on aurait

$$\begin{aligned} |x| &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1 x + x^1 \left(a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)\right). \\ &= a_0 + a_1 x + x^1 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

pour un autre $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$. La fonction aurait donc un DL_1, contresisant (ii).

Théorème 5.12 (Formule de Taylor)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ avec $I =$ intervalle ouvert $\ni x_0$. Alors f admet un DL d'ordre n en x_0 donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + x^n \underset{x \to x_0}{\tilde{\varepsilon}(x) \longrightarrow 0}.$$

Les a_k sont donc donnés par

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}, \ldots, \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}.$$

Preuve. Technique ! □

Remarque 5.14 (Formule pour $\tilde{\varepsilon}(x)$ utile plus tard)). Si $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$, alors $\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(v)(x - a)$ pour un v entre x et a.

Développements limités à connaitre (tous en $x_0 = 0$):

- $f(x) = \sin(x)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Il existe donc un DL de n'importe quel ordre, autour de n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$! Pour le DL en 0, on calcule: $f^{(k)}(0) = 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$, et donc $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)} = (-1)^n$. Ainsi:
$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{x^7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1} \underset{x \to 0}{\varepsilon(x) \longrightarrow 0}$$
(DL_{2n+1} en 0).
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n} \underset{x \to 0}{\varepsilon(x) \longrightarrow 0}$ (DL_{2n} en 0).
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \underset{x \to 0}{\varepsilon(x) \longrightarrow 0}$ (DL_n en 0).
- $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \pm \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + x^n \underset{x \to 0}{\varepsilon(x) \longrightarrow 0}$ (DL_n en 0).
- $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \underset{x \to 0}{\varepsilon(x) \longrightarrow 0}$ (DL_n en 0).

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots + (-1)^n x^n + x^n \underset{x\to 0}{\underbrace{\varepsilon(x)}_{\longrightarrow 0}}$ (DL$_n$ en 0).

Application: Calculs de limites !

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$ (Vu en classe).
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2 + 2\cos(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2 + 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))}{x^4} = \dfrac{2}{4!} + \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = \dfrac{1}{12}$.
- $\lim_{x\to 0}(1 + 3x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+3x)}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{3x + 3x\varepsilon(3x)}{x}\right) = = \exp\left(3 + \lim_{x\to 0}\varepsilon(3x)\right) = e^3$.

Calculs de DL:

- Formule de Taylor: Marche toujours mais parfois un peu long.
- Somme/produit de DL: OK (mais vérifier que l'erreur est de la forme $x^n\varepsilon(x)$). Exemple: DL de $e^x + \sin(x)\cos(x) = (\text{DL de } e^x) + (\text{DL de } \sin(x))(\text{DL de } \cos(x))$.
- Composition de DL: OK mais:
$$\text{DL de } g \circ f \text{ en } x_0 = (\text{DL de } g \text{ en } f(x_0)) \circ (\text{DL de } f \text{ en } x_0).$$
De plus, l'ordre obtenu est toujours (au moins) aussi grand que l'ordre des DL de f et g.

Exemples:

- DL$_1$ en 0 de $f(x) = e^{\sin(x)}$. On utilise les DL$_1$ en 0 de e^x et de $\sin(x)$:
$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} = e^{x+x\varepsilon(x)} &= 1 + (x + x\varepsilon(x)) + (x + x\varepsilon(x))\varepsilon_2(x + x\varepsilon(x)). \\ &= 1 + x + x(\underbrace{\varepsilon(x) + (1+\varepsilon(x))\varepsilon_2(x+\varepsilon(x))}_{\to 0}). \\ &= 1 + x + x^1\varepsilon(x). \end{aligned}$$
- DL$_2$ en 0 de $f(x) = \cos(\log(1+x))$. On utilise le DL$_2$ en 0 de $\cos(x)$, puis on tente notre chance avec le DL$_1$ de $\log(1+x)$:
$$\begin{aligned} \cos(\log(1+x)) &= 1 - \frac{1}{2}(\log(1+x))^2 + (\log(1+x))^2\varepsilon(\log(1+x)) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x + x\varepsilon_1(x))^2 + (x + x\varepsilon_1(x))^2\varepsilon(x + x\varepsilon_1(x)) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2(\underbrace{-\varepsilon_1(x) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^2(x) + (1+\varepsilon_1(x))\varepsilon(x + x\varepsilon_1(x))}_{\to 0}) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

- DL_1 en 0 de $f(x) = e^{\cos(x)}$. *ERREUR:* on prend les DL_1 en 0 de e^x et de $\cos(x)$:
$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} = e^{1+x\varepsilon(x)} &= 1 + (1 + x\varepsilon(x)) + (1 + x\varepsilon(x))\varepsilon_2(1 + x\varepsilon(x)). \\ &= \quad 2 \qquad\qquad + \qquad\qquad \varepsilon_2(1+\varepsilon(x)) + \cdots \\ &\quad (\neq f(0) = e^{\cos(0)} = e) + (\text{pas de la forme } x\varepsilon(x)) \end{aligned}$$
Solution:
  (i) Prendre le DL_1 en $\cos(0) = 1$ de e^x et le DL_1 en 0 de $\cos(x)$: On a
  $$e^x = e + e(x-1) + (x-1)\underbrace{\tilde{\varepsilon}(x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{} 0} \quad \text{(Formule de Taylor)}$$
  D'où:
  $$\begin{aligned} e^{\cos(x)} = e^{1+x\varepsilon(x)} &= e + e(1 + x\varepsilon(x) - 1) + (1 + x\varepsilon(x) - 1)\tilde{\varepsilon}(1 + x\varepsilon(x)). \\ &= e + x(\underbrace{e\varepsilon(x) + \varepsilon(x)\tilde{\varepsilon}(1 + x\varepsilon(x))}_{\to 0}) \\ &= e + x^1\varepsilon(x). \end{aligned}$$
  (ii) Réécrire l'expression pour avoir quelque chose qui $\to 0$:
  $$\begin{aligned} e^{\cos(x)} = e^{1+x\varepsilon(x)} &= e \cdot e^{x\varepsilon(x)} \\ &= e \cdot \Big(1 + x\varepsilon(x) + x\varepsilon(x)\varepsilon_2(x\varepsilon(x))\Big) \\ &= e + x(\underbrace{e\varepsilon(x) + \varepsilon(x)\varepsilon_2(x\varepsilon(x))}_{\to 0}) \\ &= e + x^1\varepsilon(x). \end{aligned}$$
  Ici cela a fonctionné car $x\varepsilon(x) \to 0$, donc l'erreur est de la forme voulue.
- DL_4 en $x_0 = 0$ de $\dfrac{1}{\cos(x)}$: Idée: $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1 + (\cos(x) - 1)} = \dfrac{1}{1+y}$, où $y = \cos(x) - 1 \xrightarrow{x\to 0} 0$. On va combiner un DL de $\frac{1}{1+x}$ avec un DL de $\cos(x) - 1$. On a
$$\begin{aligned} \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + y^2\varepsilon(y) \quad \text{et} \quad y = \cos(x) - 1 &= -\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon_4(x). \end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+y} &= 1 - \Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon_4(x)\Big) \\ &\quad + \Big(-\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\Big)^2 + \Big(-\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\Big)^2 \cdot \varepsilon(y). \end{aligned}$$
En développant, on s'aperçoit que tous les termes touchant un terme rouge sont de la forme $x^4 \underbrace{\tilde{\varepsilon}(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$. Ainsi
$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}(x).$$

5.5 Séries de Taylor

Rappel: Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ avec $I =$ intervalle ouvert $\ni a$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \overbrace{(x-a)^n \underset{x\to 0}{\underbrace{\varepsilon(x)}_{\longrightarrow 0}}}^{r_n(x)}$$

Donc, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, a-t-on $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$? Il faut que 1) la série converge, et 2) le reste $r_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 5.15. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $I =$ intervalle ouvert $\ni a$, la **série de Taylor de** f **centrée en** a est la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Remarque 5.15.
- C'est une série entière ! (centre $= a$. Rayon de convergence $= ?$).
- Si $a = 0$, on l'appelle aussi **Série de MacLaurin**.

Exemples:

1) $f(x) = \frac{1}{1-x} \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$, $a = 0$. On sait que (i) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \underbrace{\varepsilon(x)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$, (ii) les DL sont uniques $\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow$ la série de Taylor de f est $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, (iii) cette série converge pour tout $x \in\,]-1,1[$ et vaut $\frac{1}{1-x}$ (Série géométrique). En somme: pour tout $x \in\,]-1,1[$, on a $\frac{1}{1-x} = \text{Taylor}\left(\frac{1}{1-x}\right)_{a=0} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

2) $f(x) = e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $a = 0$. On a $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \underbrace{\varepsilon(x)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$ (DL en 0). La série de Taylor est donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cf Chapitre 3). Il reste à voir que $r_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par la formule du reste (remarque après la formule de Taylor), on a $\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(v) \cdot x$ pour un v entre 0 et x. Donc $r_n(x) = x^n\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^v x^{n+1}$, et ainsi $0 \leq |r_n(x)| = \frac{e^v |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc $e^x = \text{Taylor}(e^x)_{a=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.13 (Dérivée de séries entières)**.** *Si* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$ *avec rayon de convergence* $r > 0$*, alors* $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(k+1)(x-a)^k$ *avec même rayon de convergence* r*.*

Conséquences:

- On peut *définir* $e^x = \exp(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $\exp(0) = 0$ et $\exp'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$. C'est donc (l'unique) solution de $f' = f, f(0) = 1$.
- Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$, alors $f(a) = b_0$, $f'(a) = b_1$, $f''(a) = 2b_2$, ..., $f^{(k)}(a) = k!b_k$.

  Donc $b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, et cette série est déjà la série de Taylor de f.

Retour aux exemples:

3) $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \underset{x\to 0}{\varepsilon(x) \longrightarrow 0}$ (DL en 0). La série de Taylor est donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, de rayon de convergence $r = 1$. A l'aide de la proposition, on calcule

$$\left(\log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)' = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} k x^{k-1}$$
$$= \frac{1}{1-(-x)} - \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k = 0.$$

Donc $\log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = C$, et en remplaçant $x = 0$, on trouve $C = 0$.

Ainsi, $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ pour tout $x \in]-1,1[$, et donc aussi pour tout $x \in]-1,1]$ par prolongement par continuité.

4) $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (exercice).

Remarque 5.16. Cela donne une raison pour la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. En effet, on a:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}}_{\text{termes pairs}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{termes impairs}}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos(x) + i\sin(x).$$

5) $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{}{(2k)!} x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6) Contre-exemple à $f = \text{Taylor}(f)$: On considère $f(x) = e^{-1/x^2}$ prolongée en $x = 0$ par $f(0) = 0$. Alors $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, et on calcule $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, ce qui implique $f'(0) = 0$ (cf Prop. 5.10). De manière analogue, on montre alors par récurrence que $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot p(1/x)$ si $x \neq 0$, où p est un polynôme, et que $f^{(n)}(0) = 0$. Ainsi, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\text{Taylor}(f)_{a=0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$. Mais $f(x) = e^{-1/x^2} \neq \text{Taylor}(f)_{a=0}$ si $x \neq 0$. La raison est que le DL est $f(x) = 0 + r_n(x)$, avec reste $r_n(x) = e^{-1/x^2}$, qui ne tend pas vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Remarque 5.17. Donc $\sin(x)$ et $\sin(x) + e^{-1/x^2}$ ont la même série de Taylor !

Chapitre 6: Intégrales

6.1 Primitives et intégrales

Définition 6.1. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ (continue) où I = intervalle. Une **primitive** de f est une fonction dérivable $F\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque 6.1. Si F, G sont deux primitives de f, alors $(F-G)' = f - f = 0$, et donc $F(x) = G(x) + C$.

Notation: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \{\text{primitives de } f\} = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, où F est une primitive de f.

Abus de notation: $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
	$= \arccos(x) + C$

Remarque 6.2. L'intégrale $\displaystyle\int f(x)\,dx$ s'appelle l'**intégrale indéfinie** de f.

Changeons d'angle de vue: Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, quelle est l'aire sous la courbe du graphe de f ? Pour approximer l'aire, on commence par choisir $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ (c'est une partition de $[a,b]$). On obtient:

- **Approx. 1 (Inférieure):** Aire $\approx$ aire des rectangles *sous* la courbe:
$$\text{Approx. } 1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$
- **Approx. 2 (Supérieure):** Aire $\approx$ aire des rectangles *sur* la courbe:
$$\text{Approx. } 2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Remarque 6.3. On a: Approx. 1 $\leq$ Aire $\leq$ Approx. 2.

Définition 6.2. Une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est **intégrable** (au sens de Riemann) si
$$\sup\{\text{Approx. } 1\} = \inf\{\text{Approx. } 2\} = A \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = A$, c'est l'**intégrale définie** de f sur $[a,b]$.

Convention: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque 6.4. $\int_a^b f(x)\,dx =$ aire *signée* sous la courbe.

Théorème 6.1. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est* continue*, ou* monotone *(ou continue partout sauf en un ensemble fini de points), alors f est intégrable (au sens de Riemann).*

Preuve. Technique ! (Monotone: exercice.) □

Proposition 6.2 (Premières propriétés)**.** *Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables. Alors*

1) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ *pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Si $a < u < b$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^u f(x)\,dx + \int_u^b f(x)\,dx$.

3) Si $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve. Technique ! (Idée vue en classe). □

Remarque 6.5.
- Cela définit l'**intégrale de Riemann**. Il en existe d'autres: Intégrale de Lebesgue, intégrale d'Itô, ...
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$.
- Comme $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, le point 3) de la proposition implique
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Théorème 6.3 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $u \in \,]a,b[$ tel que* $\int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$.

Preuve. Soit $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$. Comme $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$, en divisant par $(b-a)$, on obtient $m \leq y \leq M$, où $y = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Par le TVI, f atteint y: il existe donc $u \in \,]a,b[$ tel que $f(u) = y$. □

Remarque 6.6. Donc $f(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Lien entre $\int$ et $\int_a^b$:

Théorème 6.4 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1) La fonction

$$\begin{aligned} G\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

est une primitive de f sur $[a,b]$.

2) Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Preuve. 1) On a

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} f(u)\cdot h = \lim_{u\to x} f(u) = f(x), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de la moyenne pour trouver $u \in \,]x, x+h[$; donc $u \to x$ lorsque $h \to 0$.

2) On a $F(x) = G(x)+C$ et donc $F(b)-F(a) = G(b)-G(a)+C-C = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - 0$.

$\square$

Notation: $\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$.

6.2 Calcul d'intégrales

Exemples faciles:

1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi = -\cos(\pi) - -\cos(0) = 2$. Mais $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - -\cos(0) = 0$ (l'aire négative compense l'aire positive).

2) $\displaystyle\int (3x+1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + x + C.$

$$\int a^x\,dx = \int e^{\log(a)x}\,dx = \frac{1}{\log(a)} e^{\log(a)x} + C = \frac{a^x}{\log(a)} + C.$$

3) $\displaystyle\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + C$. Ex: $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$

4) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$. Ex: $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\log|\cos(x)| + C$.

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$

Proposition 6.5 (Changement de variable / Substitution). *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi\colon [u,v] \to [a,b]$, *avec* $\varphi \in \mathcal{C}^1([u,v])$ *et* $\varphi(u) = a, \varphi(v) = v$. *Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Preuve. Soit F une primitive de f et $G(t) = F(\varphi(t))$. Alors $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, d'où $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(v)) - F(\varphi(u)) = G(v) - G(u) = \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$ □

Remarque 6.7. Si φ est bijective, alors $F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$ et donc $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ évalué en $t = \varphi^{-1}(x)$.

Exemples:

- $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. On considère $\varphi\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]; \varphi(t) = \sin(t)$. On a $\varphi(0) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = a$ et $\varphi'(t) = \cos(t)$. Écrit plus rapidement: $x = \sin(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos(t) \Rightarrow dx = \cos(t)dt$. Ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$
- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. On pose $\varphi\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]; \varphi(t) = \sin(t)$. Alors φ est bijective, et donc $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t)\sqrt{1-\sin(t)^2}$ évalué en $t = \arcsin(x)$. Donc l'intégrale vaut $\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

Remarque 6.8. On peut aussi exprimer t en fonction de x. Exemple: $\int e^{x^2} x\,dx$. On substitue $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$ pour trouver $\int e^t \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Comment choisir *la* bonne substitution ? Difficile en général. Exemples

- $\int e^{x^2} x\,dx$, $\int \sin(x^2)x\,dx$: $t = x^2 =$ "ce qu'il y a dedans".
- $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$, $\int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}\,dx$: $t =$ "ce qu'il y a dessous, ou dedans dessous".
- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$: $t = \sin(x)$ ou $\sinh(x) =$ "ce qui forme un $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ou $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$".
- Fonctions rationnelles en $\sin, \cos$: $\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx, \int \frac{1}{\sin^4(x)}\,dx$. Ici, on substitue $t = \tan(x)$ "si les racines disparaissent" (et donc $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$) et $t = \tan(\frac{x}{2})$ sinon (et donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$).

Exemples:

- $\int \frac{1}{\sin(x)}$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$ pour trouver $\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| + C = \log|\tan(\frac{x}{2})| + C$.
- $\int \frac{1}{\sin^4(x)}$. On substitue $t = \tan(x)$ pour trouver $\int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int t^{-4} + t^{-2}\, dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3\tan^3(x)} - \frac{1}{\tan(x)} + C$

Proposition 6.6 (Intégration par parties)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, $g \in \mathcal{C}^1([a,b)]$ et F une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\uparrow}\underbrace{g(x)}_{\downarrow}\, dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx.$$

Preuve. On a $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$ et donc $\int_a^b fg\, dx = \int_a^b (Fg)'\, dx - \int Fg'\, dx = \big[Fg\big]_a^b - \int Fg'\, dx$. □

Remarque 6.9. Cela montre au passage que $\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx$.

Exemples:

1) $\int \underbrace{e^x}_{\uparrow}\underbrace{x}_{\downarrow}\, dx = e^x x - \int e^x\, dx = e^x(x-1) + C$.
2) $\int \log(x)\, dx = \int \underbrace{\log(x)}_{\downarrow}\underbrace{1}_{\uparrow}\, dx = \log(x)x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = x\log(x) - x + C$.
3) $\int \cos(x)^2\, dx = \int \underbrace{\cos(x)}_{\uparrow}\underbrace{\cos(x)}_{\downarrow}\, dx = \sin(x)\cos(x) + \int \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)}\, dx = \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos(x)^2\, dx$. Ainsi, si $I = \int \cos(x)^2\, dx$, on a $I = \sin(x)\cos(x) + x - I$, d'où $I = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x)) + C$.
4) (Intégration par récurrence)

$$\begin{aligned}
A_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\, dx &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(x)}_{\uparrow}\underbrace{\cos^{2n-1}(x)}_{\downarrow}\, dx \\
&= \Big[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)(2n-1)\cos^{2n-2}(x)(-\sin(x))\, dx \\
&= 0 + (2n-1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(x)}_{=1-\cos^2(x)}\ \cos^{2n-2}(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$= (2n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)}(x)\,dx - (2n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,dx$$
$$= (2n-1)A_{n-1} - (2n-1)A_n.$$

Ainsi $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$, d'où $A_n = \frac{2n-1}{2n}A_{n-1}$ et $A_0 = \frac{\pi}{2}$. Cela permet de calculer tous les A_n récursivement. (Autre formule vue en classe).

Intégration de fonctions rationnelles: $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x), q(x) =$ polynômes.

Building Blocks:

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x+d}\,dx = \log|x+d| + C$. Donc, on a $\displaystyle\int \frac{1}{ax+d}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x+d/a}\,dx = \frac{1}{a}\log|x+d/a| + C$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^k}\,dx = \int (x+d)^{-k}\,dx = \frac{-1}{k-1}\frac{1}{(x+a)^{k-1}} + C.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)+C$. Donc, en substituant $u = x/d$, on a $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+d^2}\,dx = \int \frac{1}{d^2u^2+d^2}\cdot d\cdot du = \frac{1}{d}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{d}\arctan(\frac{x}{d}) + C$. De plus, si le polynôme x^2+bx+c a un discriminant $\Delta = b^2-4c < 0$, on peut écrire $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 + \underbrace{\frac{-\Delta}{4}}_{=d^2}$ et donc, en substituant $u = \frac{x+b/2}{d}$, on trouve

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+d^2}\,dx = \int \frac{1}{d^2u^2+d^2}\cdot d\cdot du$$
$$= \frac{1}{d}\arctan\left(\frac{x+b/2}{d}\right) + C.$$

(iv) $\displaystyle\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \log|x^2+bx+c| + C.$

(v) $\displaystyle\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\,dx$: on substitue $u = x^2+bx+c$, pour trouver $\displaystyle\int u^{-k}\,du = \frac{1}{1-k}u^{1-k} + C = \frac{1}{1-k}(x^2+bx+c)^{1-k} + C.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}\,dx = \ldots$ Formule par récurrence (cf exercices).

A l'aide de (i) - (vi), on peut intégrer tout $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ à l'aide de la décomposition en éléments simples. Méthode:

1) Si $\deg(p) \geq \deg(q)$, division polynomiale! Exemple: $\displaystyle\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}\,dx = \int \frac{3(x^4-x^3-x+1)}{x^4-x^3-x+1} + \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1}\,dx = 3x + \int \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1}\,dx.$

2) Factoriser $q(x)$ et décomposer:

$\dfrac{p(x)}{q(x)} =$	$\dfrac{A}{x-u}$	$\dfrac{A_1}{x-u} + \dfrac{A_2}{(x-u)^2} + \cdots + \dfrac{A_k}{(x-u)^k}$
pour chaque facteur	$x-u$	$(x-u)^k$
	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \dfrac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$
pour chaque facteur	(ax^2+bx+c)	$(ax^2+bx+c)^k$

Exemple: $q(x) = x^4 - x^3 + x - 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$. On décompose:

$$\frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{(A_1+A_3)x^3 + (A_2-2A_3+B_3)x^2 + (A_2+A_3-2B_3)x + (-A_1+A_2+B_3)}{x^4-x^3-x+1}.$$

En comparant les coefficients, on trouve $A_1 = 1, A_2 = 3, A_3 = 2, B_3 = 1$. Donc
$$\frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

3) Intégrer les éléments simples! Exemple: $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1| + C$, $\displaystyle\int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{-3}{x-1} + C$, $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \log|x^2+x+1| + C$. Ainsi:
$$\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}\,dx = 3x + \log|x-1| + \frac{-3}{x-1} + \log(x^2+x+1) + C.$$

6.3 Intégrales généralisées / impropres

On a vu que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire (signée) sous la courbe. On aimerait généraliser cela à $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ et $f\colon\ ]-\infty,\infty[\ \to \mathbb{R}$. Exemples: $\displaystyle\int_0^1 \log(x)\,dx = ?$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = ?$

Problème: L'Approx. 1 ou l'Approx. 2 est toujours $\pm\infty$. Solution: Limites!

Définition 6.3. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue, où $I =$ intervalle.

1) Si $I = [a,b[$ (avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), alors $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{u\uparrow b} \int_a^u f(x)\,dx$.
2) Si $I =]a,b]$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$), alors $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{u\downarrow a} \int_u^b f(x)\,dx$.
3) Si $I =]a,b[$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), alors
$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_{a^+}^{w} f(x)\,dx + \int_w^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{u\downarrow a} \int_u^w f(x) + \lim_{v\uparrow b} \int_w^v f(x)\,dx,$$
où $w \in\ ]a,b[$ est arbitraire.

Remarque 6.10. • Ce sont des **intégrales généralisées/impropres**.
- L'intégrale **converge** si la (*les !*) limite existe $\in \mathbb{R}$, et elle **diverge** sinon.
- Pour 3), on peut montrer que le résultat est indépendant du w choisi.

Notation: $\int_a^{+\infty^-} = \int_a^{+\infty}$, $\int_{-\infty^+}^b = \int_{-\infty}^b$. Exemples:

1) $\int_{0^+}^1 \log(x)\,dx = \lim_{u\downarrow 0}\int_u^1 \log(x)\,dx = \lim_{u\downarrow 0}\Big[x\log(x)-x\Big]_u^1 = \lim_{u\downarrow 0}\Big(-1-u\log(u)-u\Big) = -1-\lim_{v\to+\infty}\frac{\log(1/v)}{v} = -1+\lim_{v\to+\infty}\frac{\log(v)}{v} \overset{\text{BH}}{=} -1+0=-1.$
2) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-x}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^u = \lim_{u\to+\infty}(1-e^{-u}) = 1.$
3) Pour $r>0$, on a $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases}\frac{1}{1-r} & \text{si } r\le 1\\ +\infty & \text{si } r>1.\end{cases}$ (Vu en classe.)

   Exercice: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases}+\infty & \text{si } r\le 1\\ \frac{1}{r-1} & \text{si } r>1.\end{cases}$
4)
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \lim_{u\to-\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_u^0+\lim_{v\to+\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_0^v\\ &= 0-\lim_{u\to-\infty}\arctan(u)+\lim_{v\to+\infty}\arctan(v)-0 = --\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.\end{aligned}$$

Remarque 6.11. <u>**Si**</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge (i.e. si les **deux** limites existent $\in\mathbb{R}$) alors cette intégrale vaut $\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^u f(x)\,dx$ (c'est la **valeur principale de Cauchy** de l'intégrale).

Mais attention:

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^0 x\,dx+\int_0^{+\infty}x\,dx = \lim_{u\to-\infty}\frac{-u^2}{2}+\lim_{v\to+\infty}\frac{v^2}{2} = -\infty+\infty$, donc l'intégrale diverge. En revanche, sa valeur principale de Cauchy existe et vaut $\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^u x\,dx = \lim_{u\to+\infty}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{-u}^u = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{2}-\frac{u^2}{2} = 0$. Ce **n'est donc pas** la valeur de l'intégrale.

Proposition 6.7 (Comparaison d'intégrales)**.** *Soient $f,g\colon [a,b[\to\mathbb{R}$ continues telles que $0\le f(x)\le g(x)$ pour tout $x\in[a,b[$. Alors*

1) $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{b^-} f(x)\,dx$ converge

2) $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{b^-} g(x)\,dx$ diverge.

Preuve. Théorème du gendarme seul! □

Remarque 6.12. Marche aussi avec $\displaystyle\int_{a^+}^{b}$ et $\displaystyle\int_{a^+}^{b^-}$.

Exemple: $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}\,dt$ converge par comparaison. En effet, pour $t \in [0,1[$, on a $t^3 \leq t \Rightarrow 1-t^3 \leq 1-t \Rightarrow \sqrt{1-t^3} \geq \sqrt{1-t} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ et en substituant $x = 1-t$, on trouve $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ qui converge.

Proposition 6.8 (Comparaison intégrale/série)**.** *Soit $f\colon [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive ($f(x) \geq 0$), continue et décroissante (pour x assez grand). Alors la série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent/divergent en même temps.*

Preuve visuelle. Vue en classe. □

Exemples:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow p > 1$.
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p}\,dx$. En substituant $u = \log(x)$, cette intégrale vaut $\displaystyle\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{e^u \cdot u^p} e^u du = \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^p}\,dx$ qui converge $\Leftrightarrow p > 1$. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$ converge si et seulement si $p > 1$.

En particulier, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ diverge, mais $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)^2}$ converge !