Ens. : Peter Wittwer
Analyse avancée II - PH
26 juin 2023
Durée : 3.5 heures

SCIPER :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ -u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+t^2 \\ x(y+z+t)+y(z+t)+zt \end{pmatrix}.$$

Alors on a la matrice jacobienne suivante :

- ☐ $J_{f\circ g}(u,v) = \begin{pmatrix} 8u-2v & -2u+6v \\ 3v & 3u-2v \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{f\circ g}(u,v) = \begin{pmatrix} 8u+2v & 3v \\ 3v & 3u-2v \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{f\circ g}(u,v) = \begin{pmatrix} 8u-2v & -2u+6v \\ -2u+6v & 3u-2v \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{f\circ g}(u,v) = \begin{pmatrix} 8u+2v & 3v \\ -2u+6v & 3u-2v \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2+2x+xy+xz+yz+\frac{1}{2}z^2-z$$

Alors f possède sur $\mathbb{R}^3$:

- ☐ un point de maximum local
- ☐ un point selle
- ☐ deux points selle
- ☐ un point de minimum local

Question 3 : Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^1 y^{\frac{2}{3}} \sin(y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Alors :

- ☐ $I = \sin(y+z)$
- ☐ $I = -\cos(1)+\sin(1)$
- ☐ $I = 1$
- ☐ $I = \cos(1)+\sin(1)$

Question 4 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle de Riccati

$$y' = -y^2+2xy-x^2+1$$

qui satisfait la condition initiale $y(0)=1$ vérifie :

- ☐ $y(1) = 0$
- ☐ $y(1) = \frac{3}{2}$
- ☐ $y(1) = -\frac{1}{2}$
- ☐ $y(1) = -2$

Question 5 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \sin(x-y+z^2)\, e^{1-z}$. Alors son polynôme de Taylor d'ordre deux autour du point $(0,1,1)$ est donné par :

- ☐ $p_2(x,y,z) = x - y + z^2 + yz$
- ☐ $p_2(x,y,z) = x - y + z^2 - xz + yz)\, e$
- ☐ $p_2(x,y,z) = x - (y-1) + 2(z-1) - (z-1)^2 - x(z-1) + (y-1)(z-1)$
- ☐ $p_2(x,y,z) = x - (y-1) + 2(z-1) - (z-1)^2 + (y-1)(z-1)$

Question 6 : Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^4} \equiv \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^4}} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}\; y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$
- ☐ les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$

Question 7 : Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sqrt{\dfrac{|y|}{|x|}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

et soit le vecteur $\mathbf{v} = (1,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$. Alors on a pour la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$:

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = 0$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = 1$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = 2$

Question 8 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_{2x}^{x^2} \sin(xt)\mathrm{d}t\,.$$

Alors :

- ☐ $f'(2) = 3\sin(8)$
- ☐ $f'(2) = 0$
- ☐ $f'(2) = 2\sin(8)$
- ☐ $f'(2) = 4\sin(8) - 2\cos(4)$

Question 9 : Soit la fonction $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F((x_1,x_2),(x_3,x_4)) = (-x_1+x_3, -2x_2+2x_4)^{\mathrm{T}} .$$

et soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie implicitement par $f(1,1)=(1,1)$ et $F((x_1,x_2), f(x_1,x_2)) = 0$. Alors :

- [ ] $f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}$
- [ ] $f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

Question 10 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 5\cos(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0)=1$ et $y'(0)=-2$ vérifie :

- [ ] $y(\pi) = 1 + e^{\pi}$
- [ ] $y(\pi) = -1$
- [ ] $y(\pi) = 1 - e^{\pi}$
- [ ] $y(\pi) = 1$

Question 11 : Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie par $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 2\}$. Alors l'équation du plan tangent à S au point $(1,1,0)$ est :

- [ ] $x + y = 0$
- [ ] $z + 2x + 2y - 4 = 0$
- [ ] $x + y - 2 = 0$
- [ ] $z = 2(x-1) + 2(y-1)$

Question 12 : Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = y+z$. Alors le minimum m et le maximum M de f sous les contraintes $x^2+y^2-1=0$ et $x+z-1=0$ sont :

- [ ] $m = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $M = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
- [ ] $m = 1$ et $M = 1$
- [ ] $m = 0$ et $M = 2$
- [ ] $m = 1-\sqrt{2}$ et $M = 1+\sqrt{2}$

Question 13 : Soit

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq \tfrac{1}{2}x,\ y \geq -2x,\ y \leq -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3}\right\},$$

ou autrement dit, soit D le domaine triangulaire dont les sommets sont $(0,0)$, $(2,1)$ et $(-1,2)$. Alors l'intégrale

$$\int_D 2x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

vaut :

- [ ] $\dfrac{25}{6}$
- [ ] $\dfrac{5}{6}$
- [ ] $-\dfrac{25}{6}$
- [ ] $-\dfrac{5}{6}$

Question 14 : Soit

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4\right\}.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{z}{\sqrt{8\,(x^2+y^2)+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

vaut :

- ☐ π
- ☐ $\pi\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
- ☐ $\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$
- ☐ $\frac{3}{2}\pi$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 15 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$. Alors le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$, admet une solution qui est définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : L'ensemble $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0\big\}$ est fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soit $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \max\{|x|, |y|\} \leq 1\big\}$ et soit $((x_k, y_k))_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de D. Alors, il existe une sous-suite $\big(x_{k_j}\big)_{j\geq 0}$ de la suite des coordonnées $(x_k)_{k\geq 0}$ qui converge vers un élément de $[-1, 1]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^3\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$. Alors en tout point $p \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(p) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(p)\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si quelque soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et quelque soit $p \in]0, +\infty[$ on a $\lim\limits_{t\to 0+} f(\alpha t, \beta t^p) = 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$. Alors la restriction de f à un sous-ensemble non-vide, ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$ est une fonction bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. Alors tout point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$ est un point-selle de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : L'ensemble $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ est connexe par arcs.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé**.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 3 questions à 12, 10 et 8 points !

Question 23: *Cette question est notée sur 12 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ☐12 *Réservé au correcteur*

Soit

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \geq 2,\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 8\right\}.$$

Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = |x| - y,$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{z \in \mathbb{R} \colon \exists\,(x, y) \in D \text{ tel que } z = f(x, y)\}$.

Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$y' = y\,(1 - y)\ .$$

(a) Trouver pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ la solution maximale pour la condition initiale $y(0) = y_0$.

(b) Existent-t-ils d'autres solutions que celles trouvées sous (a) ? Justifier votre réponse.

Question 25: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Démontrer soigneusement, en contrôlant les hypothèses de tout théorème utilisé, la version suivante du théorème du “smiley vert” :

Théorème. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert non-vide, et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ existent en tout point $p \in D$. Alors, si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en un point $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in D$, la fonction f est différentiable en p_0.