



+1/1/60+

EPFL

Ens. : Peter Wittwer

Analyse avancée II - PH













26 juin 2023

Durée : 3.5 heures

SCIPER :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ et $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ -u + v \\ u - v \\ u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \\ x(y + z + t) + y(z + t) + zt \end{pmatrix}.$$

Alors on a la matrice jacobienne suivante :

☐ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u - 2v & -2u + 6v \\ 3v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

☐ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u + 2v & 3v \\ 3v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

☐ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u - 2v & -2u + 6v \\ -2u + 6v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

☐ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u + 2v & 3v \\ -2u + 6v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + 2x + xy + xz + yz + \frac{1}{2}z^2 - z$$

Alors f possède sur \mathbb{R}^3 :

☐ un point de maximum local

☐ un point selle

☐ deux points selle

☐ un point de minimum local

Question 3 : Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^1 y^{\frac{2}{3}} \sin(y) \, dy \right) dx$$

Alors :

☐ $I = \sin(y + z)$

☐ $I = 1$

☐ $I = -\cos(1) + \sin(1)$

☐ $I = \cos(1) + \sin(1)$

Question 4 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle de Riccati

$$y' = -y^2 + 2xy - x^2 + 1$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ vérifie :

☐ $y(1) = 0$

☐ $y(1) = -\frac{1}{2}$

☐ $y(1) = \frac{3}{2}$

☐ $y(1) = -2$



Question 5 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \sin(x - y + z^2) e^{1-z}$. Alors son polynôme de Taylor d'ordre deux autour du point $(0, 1, 1)$ est donné par :

- ☐ $p_2(x, y, z) = x - y + z^2 + yz$
- ☐ $p_2(x, y, z) = x - y + z^2 - xz + yz) e$
- ☐ $p_2(x, y, z) = x - (y - 1) + 2(z - 1) - (z - 1)^2 - x(z - 1) + (y - 1)(z - 1)$
- ☐ $p_2(x, y, z) = x - (y - 1) + 2(z - 1) - (z - 1)^2 + (y - 1)(z - 1)$

Question 6 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2 + y^4} \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}} y & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$
- ☐ les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$

Question 7 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sqrt{\frac{|y|}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et soit le vecteur $\mathbf{v} = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$. Alors on a pour la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$:

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 0$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0)$ n'existe pas
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 2$

Question 8 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_{2x}^{x^2} \sin(xt) dt .$$

Alors :

- ☐ $f'(2) = 3 \sin(8)$
- ☐ $f'(2) = 2 \sin(8)$
- ☐ $f'(2) = 0$
- ☐ $f'(2) = 4 \sin(8) - 2 \cos(4)$



Question 9 : Soit la fonction $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F((x_1, x_2), (x_3, x_4)) = (-x_1 + x_3, -2x_2 + 2x_4)^T.$$

et soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie implicitement par $f(1, 1) = (1, 1)$ et $F((x_1, x_2), f(x_1, x_2)) = 0$. Alors :

☐ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}$

☐ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

Question 10 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 5 \cos(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$ vérifie :

☐ $y(\pi) = 1 + e^\pi$

☐ $y(\pi) = -1$

☐ $y(\pi) = 1 - e^\pi$

☐ $y(\pi) = 1$

Question 11 : Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie par $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$. Alors l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, 0)$ est :

☐ $x + y = 0$

☐ $z + 2x + 2y - 4 = 0$

☐ $x + y - 2 = 0$

☐ $z = 2(x - 1) + 2(y - 1)$

Question 12 : Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = y + z$. Alors le minimum m et le maximum M de f sous les contraintes $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $x + z - 1 = 0$ sont :

☐ $m = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ et $M = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

☐ $m = 1$ et $M = 1$

☐ $m = 0$ et $M = 2$

☐ $m = 1 - \sqrt{2}$ et $M = 1 + \sqrt{2}$

Question 13 : Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{2}x, y \geq -2x, y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\},$$

ou autrement dit, soit D le domaine triangulaire dont les sommets sont $(0, 0)$, $(2, 1)$ et $(-1, 2)$. Alors l'intégrale

$$\int_D 2x + y \, dx \, dy$$

vaut :

☐ $\frac{25}{6}$

☐ $\frac{5}{6}$

☐ $-\frac{25}{6}$

☐ $-\frac{5}{6}$



Question 14 : Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4\}.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{z}{\sqrt{8(x^2 + y^2) + z^2}} \, dx \, dy \, dz$$

vaut :

☐ π

☐ $\pi \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

☐ $\pi \left(2 - \sqrt{3}\right)$

☐ $\frac{3}{2}\pi$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 15 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$, admet une solution qui est définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : L'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0\}$ est fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ et soit $((x_k, y_k))_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de D . Alors, il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j \geq 0}$ de la suite des coordonnées $(x_k)_{k \geq 0}$ qui converge vers un élément de $[-1, 1]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors en tout point $p \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(p) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(p).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si quelque soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et quelque soit $p \in]0, +\infty[$ on a $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\alpha t, \beta t^p) = 0$, alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en tout point de \mathbb{R}^n . Alors la restriction de f à un sous-ensemble non-vide, ouvert et borné de \mathbb{R}^n est une fonction bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est différentiable en tout point de \mathbb{R}^n . Alors tout point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $\text{grad} f(p) \neq 0$ est un point-selle de f .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ est connexe par arcs.

☐ VRAI ☐ FAUX



Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 3 questions à 12, 10 et 8 points !

Question 23: *Cette question est notée sur 12 points.*

☐ 0
 ☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
 ☐ 4
 ☐ 5
 ☐ 6
 ☐ 7
 ☐ 8
 ☐ 9
 ☐ 10
 ☐ 11
 ☐ 12
 Réservé au correcteur

Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \geq 2, (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 8\}.$$

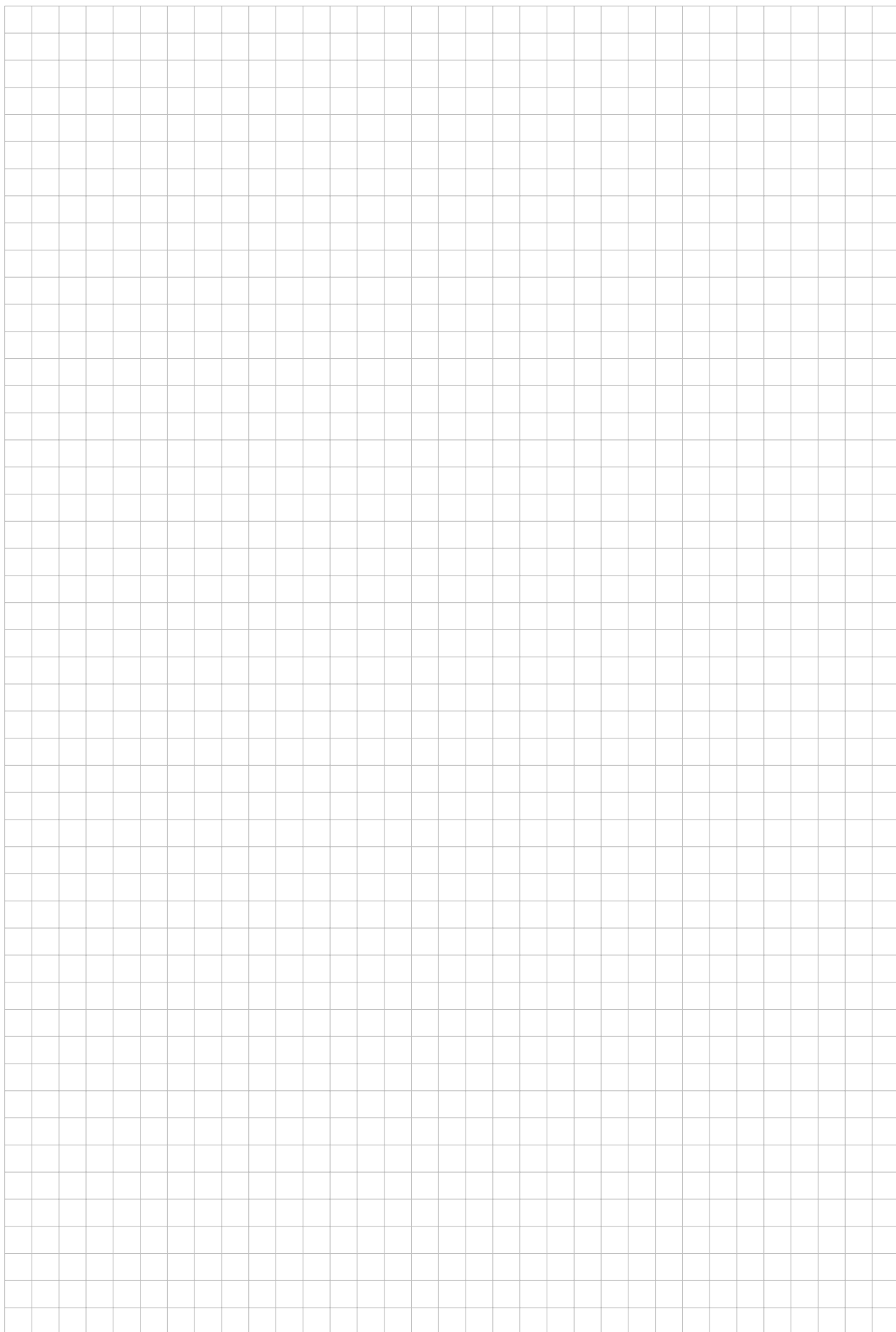
Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = |x| - y,$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in D \text{ tel que } z = f(x, y)\}$.



+1/8/53+





+1/9/52+





Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐₀ ☐₁ ☐₂ ☐₃ ☐₄ ☐₅ ☐₆ ☐₇ ☐₈ ☐₉ ☐₁₀

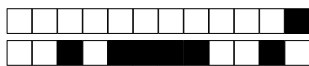
Réservé au correcteur

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans \mathbb{R} :

$$y' = y (1 - y) .$$

- (a) Trouver pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ la solution maximale pour la condition initiale $y(0) = y_0$.
- (b) Existent-t-ils d'autres solutions que celles trouvées sous (a) ? Justifier votre réponse.





+1/11/50+





Question 25: *Cette question est notée sur 8 points.*

<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	3	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	5	<input type="text"/>	6	<input type="text"/>	7	<input type="text"/>	8
----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---

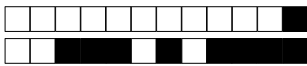
Réservé au correcteur

Démontrer soigneusement, en contrôlant les hypothèses de tout théorème utilisé, la version suivante du théorème du “smiley vert” :

Théorème. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert non-vide, et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ existent en tout point $p \in D$. Alors, si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en un point $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in D$, la fonction f est différentiable en p_0 .



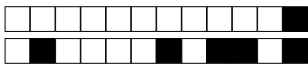




+1/14/47+



+1/15/46+



+1/16/45+