

EPFL



148

Ens. : Peter Wittwer
Analyse avancée II - XXX
21 juin 2022
Durée : 3.5 heures

XXX-9

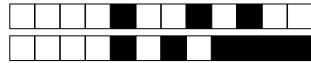
SCIPER : FAKE-9

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
+3 points si la réponse est correcte,
0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera:
+1 point si la réponse est correcte,
0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y + z, 0 \leq y \leq z, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$$

vaut :

- $\sin(y + z)$
- 0

- $\frac{1}{2}$
- 1

Question 2 : Soit $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix} xe^{y+z} \\ xe^{y-z} \\ xe^{-y} \end{pmatrix},$$

soit $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v, w) \mapsto g(u, v, w)$, une fonction de classe C^1 et soit $f = g \circ h$. Alors, indépendamment du choix de g , on a :

- $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = e^2 \frac{\partial g}{\partial u}(1, 1, 1) - \frac{\partial g}{\partial v}(1, 1, 1)$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = e^2 \frac{\partial g}{\partial u}(e^2, 1, e^{-1}) - \frac{\partial g}{\partial w}(e^2, 1, e^{-1})$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = e^{-1} \frac{\partial g}{\partial u}(1, 1, 1) - e^{-1} \frac{\partial g}{\partial w}(1, 1, 1)$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = e^2 \frac{\partial g}{\partial u}(e^2, 1, e^{-1}) - \frac{\partial g}{\partial v}(e^2, 1, e^{-1})$

Question 3 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + y^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$
- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$
- les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$



Question 5 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = e^{x^2 - y + z^3}$. Alors son polynôme de Taylor $p_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ d'ordre 3 autour du point $(0, 0, 0)$ est donné par :

- $p_3(x, y, z) = 1 - y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + z^3$
- $p_3(x, y, z) = 1 - y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x^2y - \frac{1}{6}y^3 + z^3$
- $p_3(x, y, z) = 1 - y + \frac{1}{2}y^2 - x^2y - \frac{1}{6}y^3$
- $p_3(x, y, z) = 1 - y + 2x^2 + y^2 - x^2y - \frac{1}{6}y^3 + z^3$

Question 6 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y e^{-x} \leq 4, 4 \leq y e^x \leq 9\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D y \, dx \, dy$$

vaut :

- $\ln(4) (\ln(9) - \ln(4))$
- $\frac{15}{2}$
- 18
- $\frac{273}{4}$



Question 7 : Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy + xz + yz \\ x(y - z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} u^3 + v^2 \\ 2v \\ 3u \end{pmatrix}.$$

Alors on a la matrice jacobienne suivante :

$J_{f \circ g}(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$J_{g \circ f}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$J_{f \circ g}(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$

$J_{g \circ f}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$

Question 8 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' + 2u' + u = 1 + 4e^t + 9e^{2t}$$

qui satisfait la condition initiale $u(0) = 3$ et $u'(0) = 3$ vérifie en $a = \ln(2)$:

$u(a) = -\frac{1}{2} \ln(2)$

$u(a) = 7$

$u(a) = \frac{7}{4}$

$u(a) = 3$

Question 9 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x - 1)^2 \cos(y) + \ln(y).$$

Soit $g(x)$ la fonction définie dans un voisinage de $x = 1$ implicitement par $g(1) = 1$ et $f(x, g(x)) = 0$. Alors :

$g'(1) = 0$ et $g''(1) = -2 \cos(1)$

$g'(1) = g''(1) = 0$

$g'(1) \neq 0$

$g'(1) = 0$ et $g''(1) = 2 \cos(1)$

Question 10 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{3x} e^{xe^t} dt.$$

Alors :

$f'(0) = 3$

$f'(0) = 2$

$f'(0) = 0$

$f'(0) = 4$

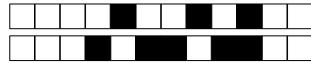
Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x + z$. Alors le minimum m et le maximum M de f sous les contraintes $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ et $x + 2z - 1 = 0$ sont :

$m = \frac{1}{5}$ et $M = 1$

$m = -\frac{1}{5}$ et $M = 1$

$m = -1$ et $M = -\frac{1}{5}$

$m = -1$ et $M = \frac{1}{5}$



Question 12 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz$$

vaut :

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{8}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4}$

Question 13 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^{(y^z)}$,

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z), t) \in D \times \mathbb{R} : t = f(x, y, z)\}$$

le graphe de f et $a = (1, 1, 1) \in D$. Alors l'équation de l'hyper-plan tangent au graphe de f au point $(a, f(a)) \in \Gamma(f)$ est :

$t - x - 1 - y = 0$

$t - x = 0$

$t - 1 + x - y = 0$

$t - x - 1 = 0$

Question 14 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'' - 2(y + 1)^3 = 0$$

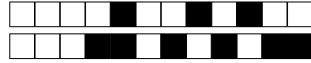
qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ vérifie en $a = -1$:

$y(a) = -\frac{1}{2}$

$y(a) = -2$

$y(a) = 0$

$y(a) = \frac{1}{2}$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 15 : L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 1\}$ est connexe par arcs.

VRAI FAUX

Question 16 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en tout point de \mathbb{R}^n . Alors la restriction de f à un sous-ensemble compact non-vide de \mathbb{R}^n est une fonction continue.

VRAI FAUX

Question 17 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = |y| e^{-\frac{1}{y^2}}$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$. Alors, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, admet, dans tout voisinage de x_0 suffisamment petit, exactement une solution $y(x)$.

VRAI FAUX

Question 18 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^n . Alors le gradient de f existe et est non nul en tout point de \mathbb{R}^n .

VRAI FAUX

Question 19 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ et soit $(p_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de D . Alors il existe une sous-suite $(p_{k_j})_{j \geq 0}$ qui converge vers un élément de D .

VRAI FAUX

Question 20 : Soit $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point tel que $F(x_0, y_0) = 0$, et $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $y_0 = f(x_0)$ et, $\forall x \in U$, $F(x, f(x)) = 0$.

VRAI FAUX

Question 21 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R}^2 telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, t) = 0$. Alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

VRAI FAUX

Question 22 : Une union quelconque de sous-ensembles fermés de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

VRAI FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Utiliser un **stylo à encre noir ou bleu foncé**.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 3 questions à 10 points chacune !

Question 23: *Cette question est notée sur 10 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Réserve au correcteur

Soient

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

et la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = -x z + y^2 - 2y.$$

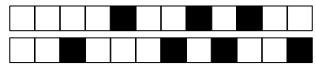
- (a) Trouver tous les points stationnaires de f dans \mathring{D} , i.e. dans l'intérieur de D , et déterminer leur nature (maximum local, minimum local ou point selle).

(b) Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction f , c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{t \in \mathbb{R} : \exists (x, y, z) \in D \text{ tel que } t = f(x, y, z)\}$.

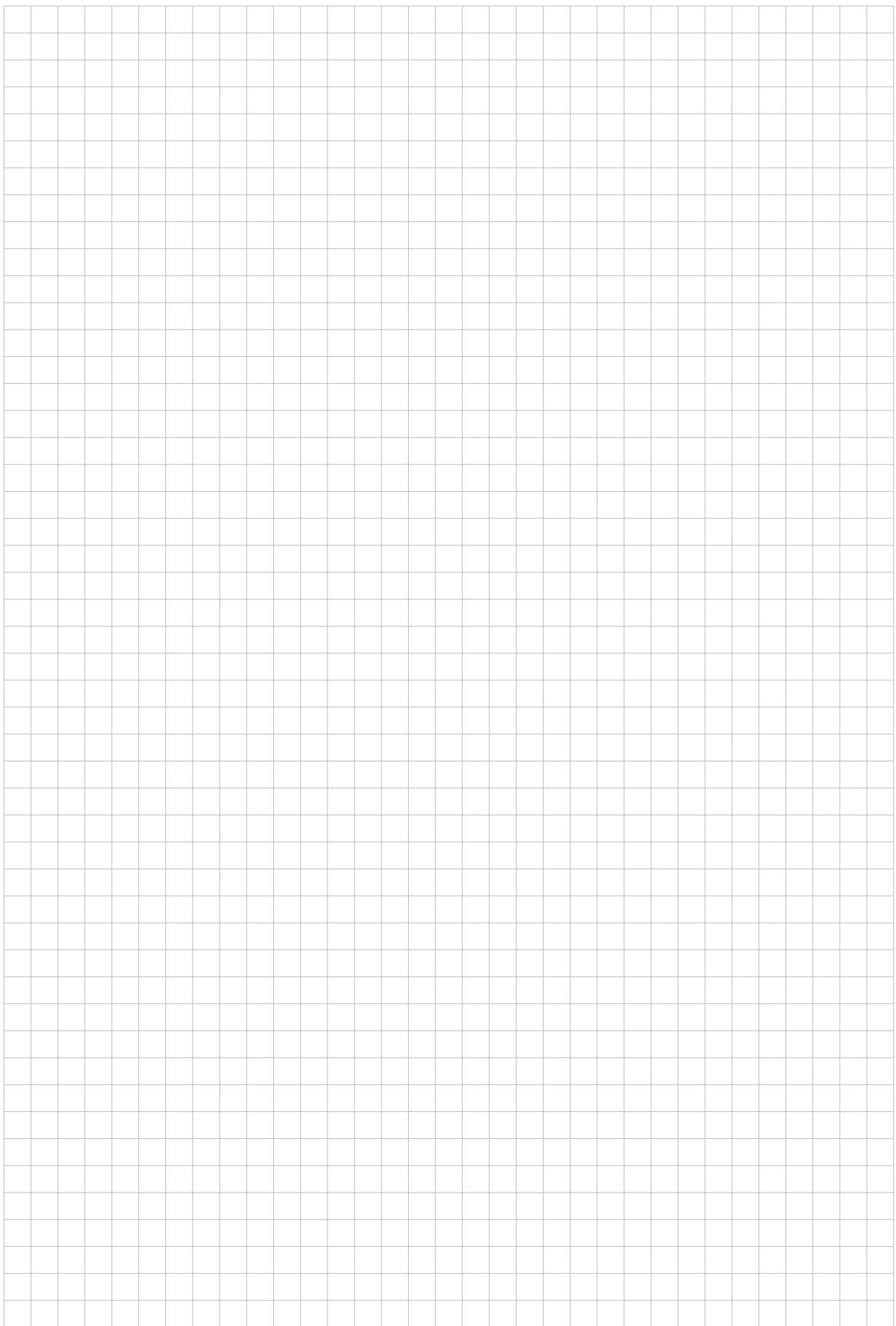
(c) Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la restriction de la fonction f à l'ensemble

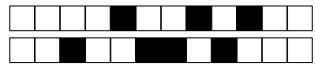
$$D_+ = \{(x, y, z) \in D : z \geq -1\}$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I_+ = \{t \in \mathbb{R}: \exists (x, y, z) \in D_+ \text{ tel que } t = f(x, y, z)\}$.

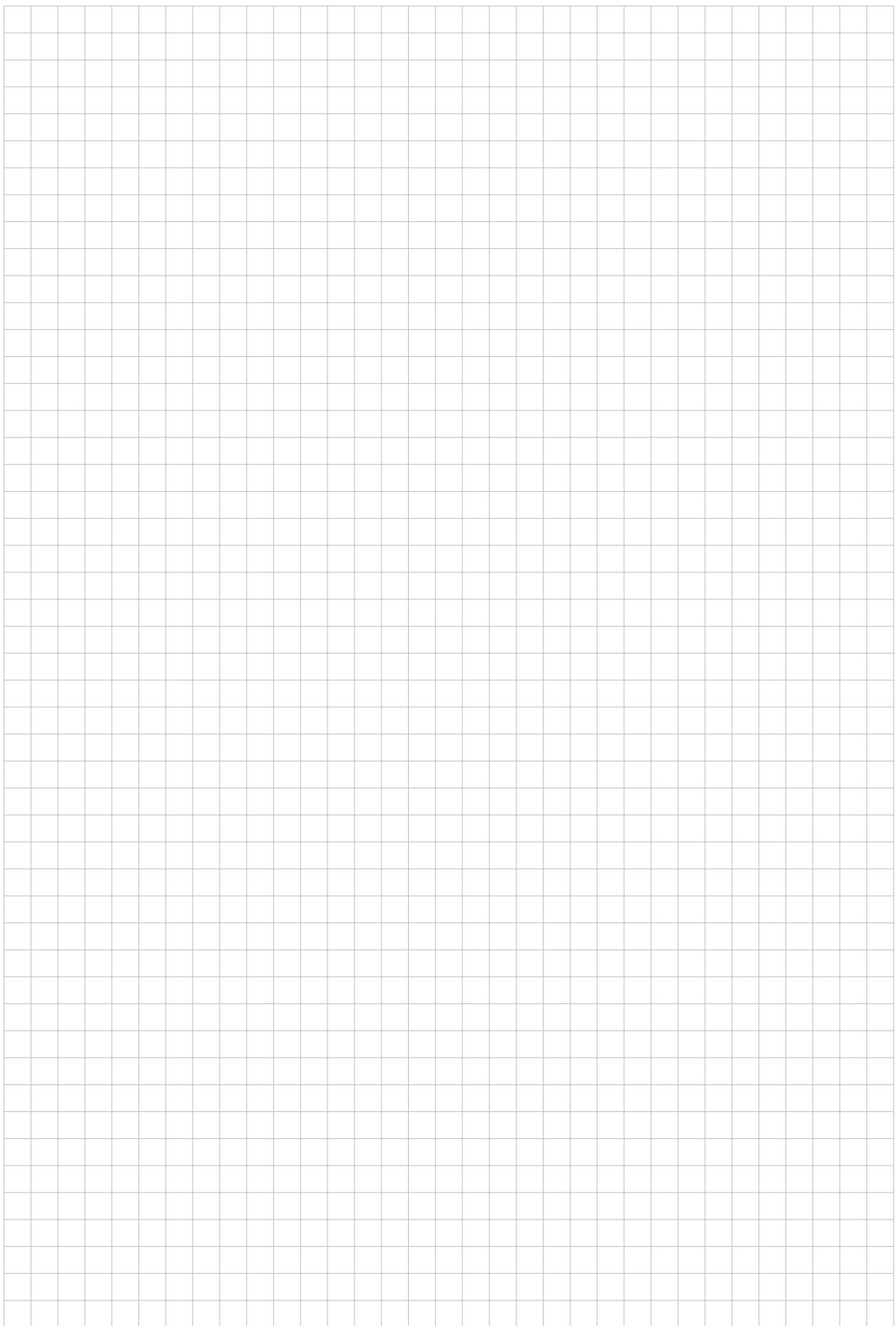


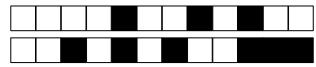
+148/8/41+





+148/9/40+





Question 24: Cette question est notée sur 10 points.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

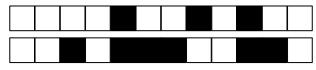
Réservé au correcteur

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans \mathbb{R} :

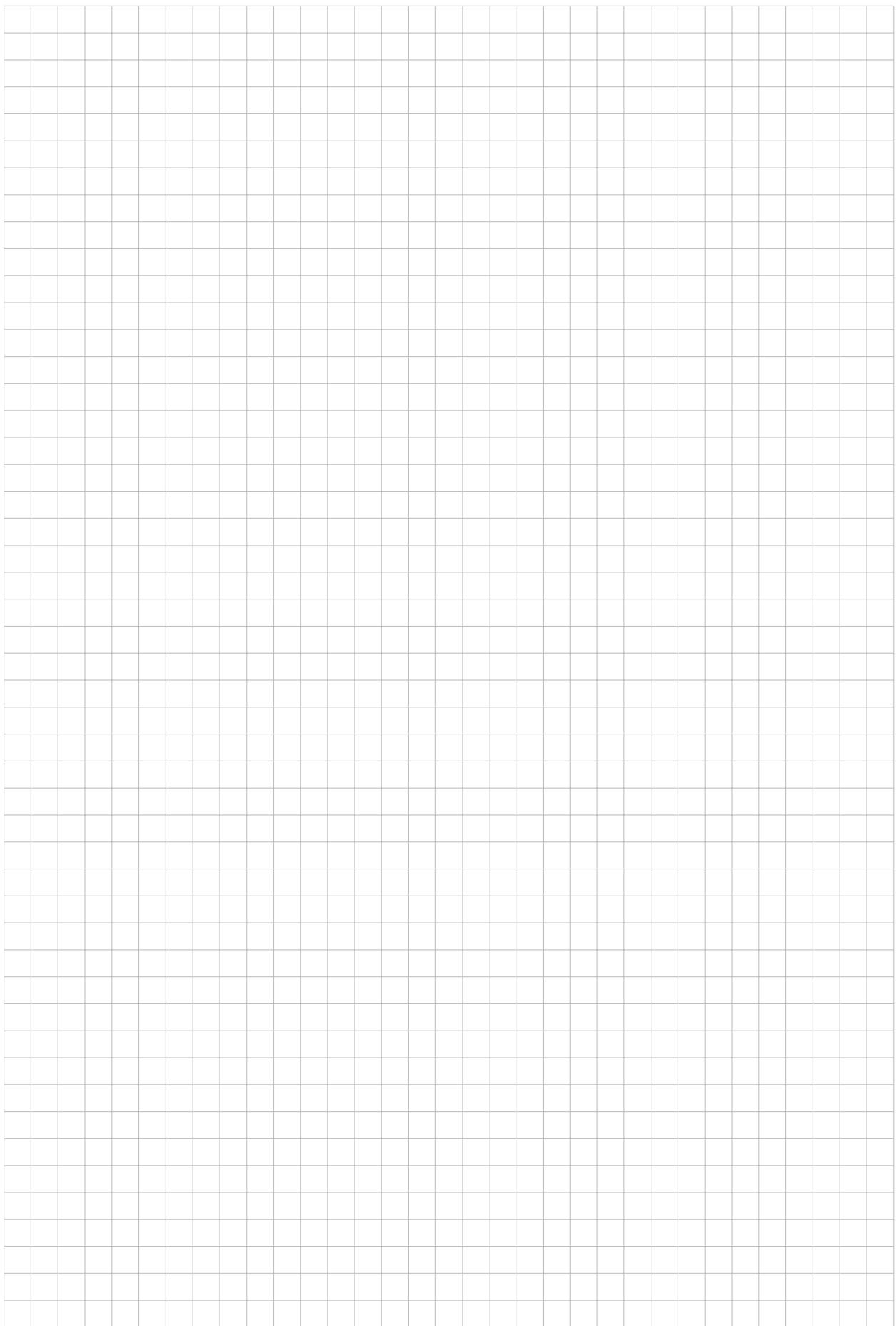
$$y' = 4x^3y^2 .$$

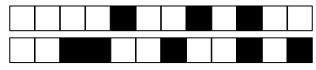
Trouver, pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donné, la solution maximale telle que $y(x_0) = y_0$.

A large grid of 20 columns and 20 rows, intended for students to work out their solution to the differential equation problem.

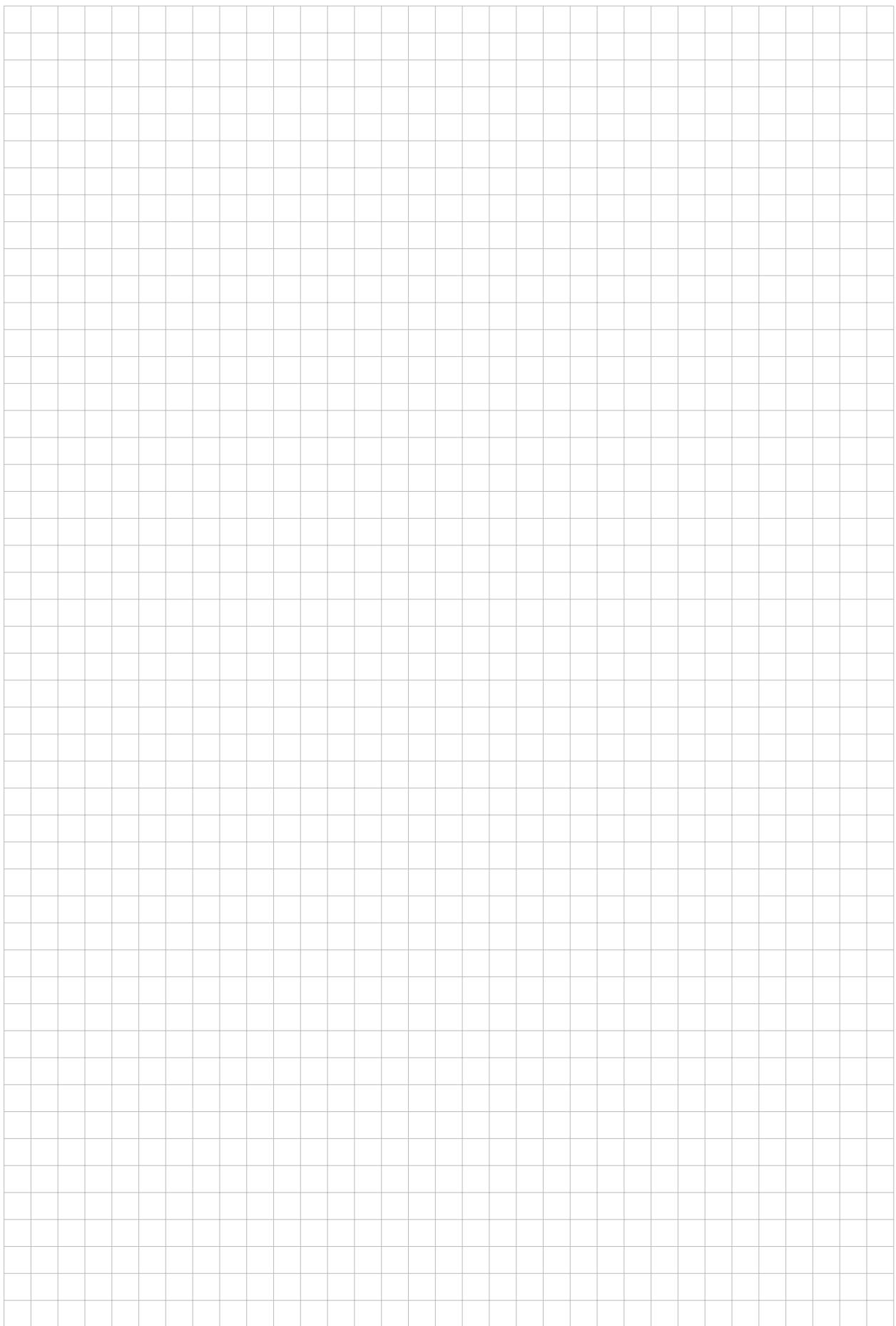


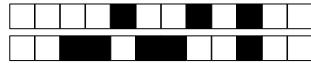
+148/11/38+





+148/12/37+





Question 25: Cette question est notée sur 10 points.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Réserve au correcteur

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\| \cdot \|$ une norme quelconque de \mathbb{R}^n et V l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ équipé de la norme $\| \cdot \|_V$, définie pour $A \in V$ par :

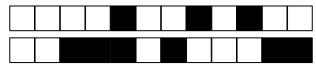
$$\|A\|_V = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Notons par $X + Y$ la somme et par XY le produit de deux matrices $X, Y \in V$, par A^{-1} l'inverse d'une matrice inversible $A \in V$, et par

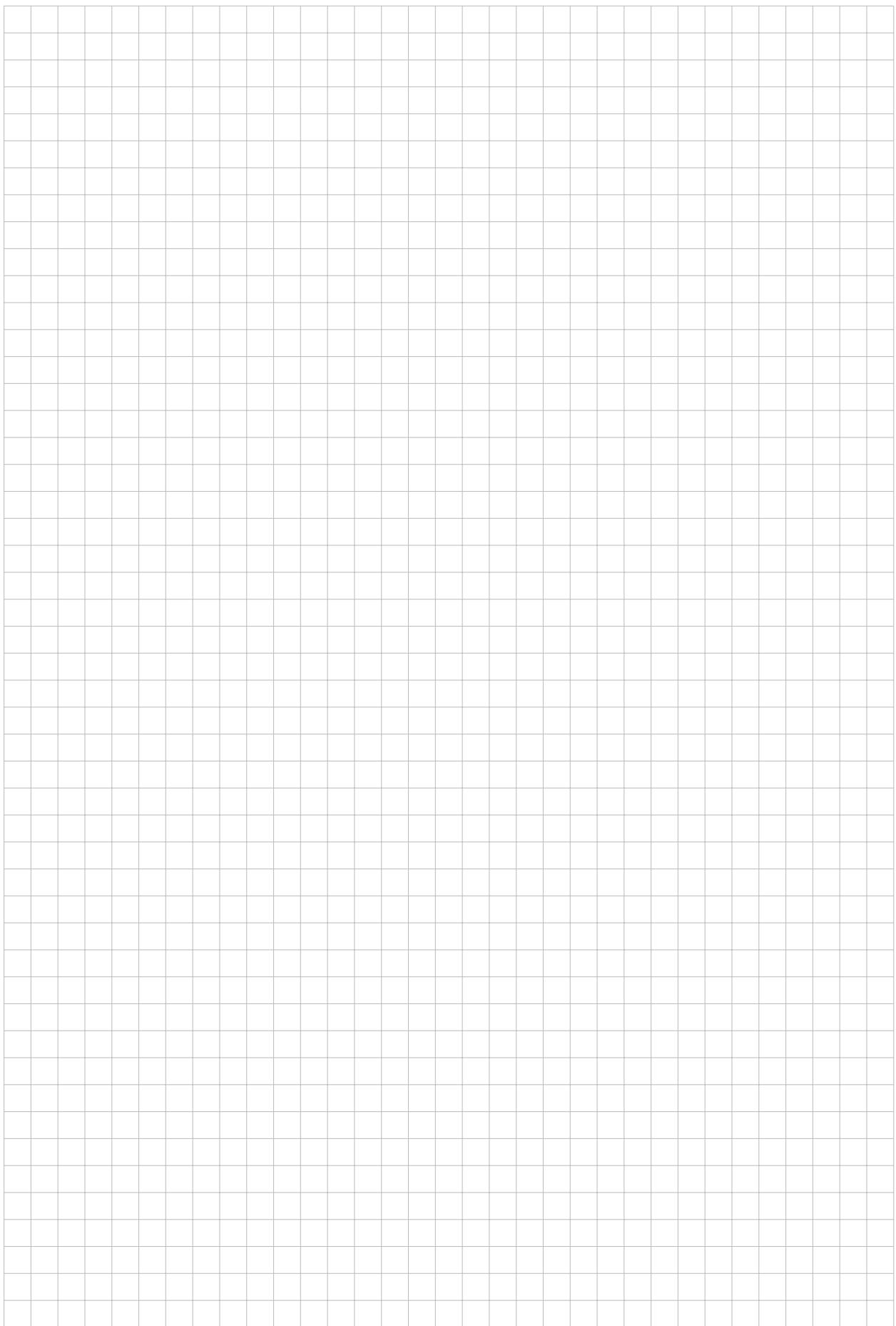
$$\mathcal{B}(A, r) = \{X \in V : \|A - X\|_V < r\}$$

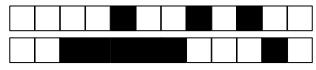
la boule ouverte de centre $A \in V$ et rayon $r > 0$. Soit de plus, pour $B \in V$ telle que $\|B\|_V < 1$, la suite de matrices $(C_k)_{k \geq 0}$ définie par $C_k = \sum_{l=0}^k B^l$, où $B^0 = I$ avec I la matrice identité de V .

- (a) Donner la définition d'un sous-ensemble ouvert de V .
- (b) Montrer, en partant de la définition de la norme $\| \cdot \|_V$, que pour tout $X, Y \in V$, $\|XY\|_V \leq \|X\|_V \|Y\|_V$.
- (c) Montrer que pour tout $A \in V$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|_V \leq \|A\|_V^k$.
- (d) Montrer que la suite $(C_k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans V .
- (e) Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} ((I - B) C_k) = I$.
- (f) Montrer que pour tout $A \in V$ la fonction $f_A : V \rightarrow V$ définie par $f_A(X) = AX$ est continue sur V .
- (g) Montrer que la matrice $I - B$ est inversible et que $(I - B)^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$.
- (h) Quelles sont les matrices de $\mathcal{B}(I, 1)$ qui sont inversibles?

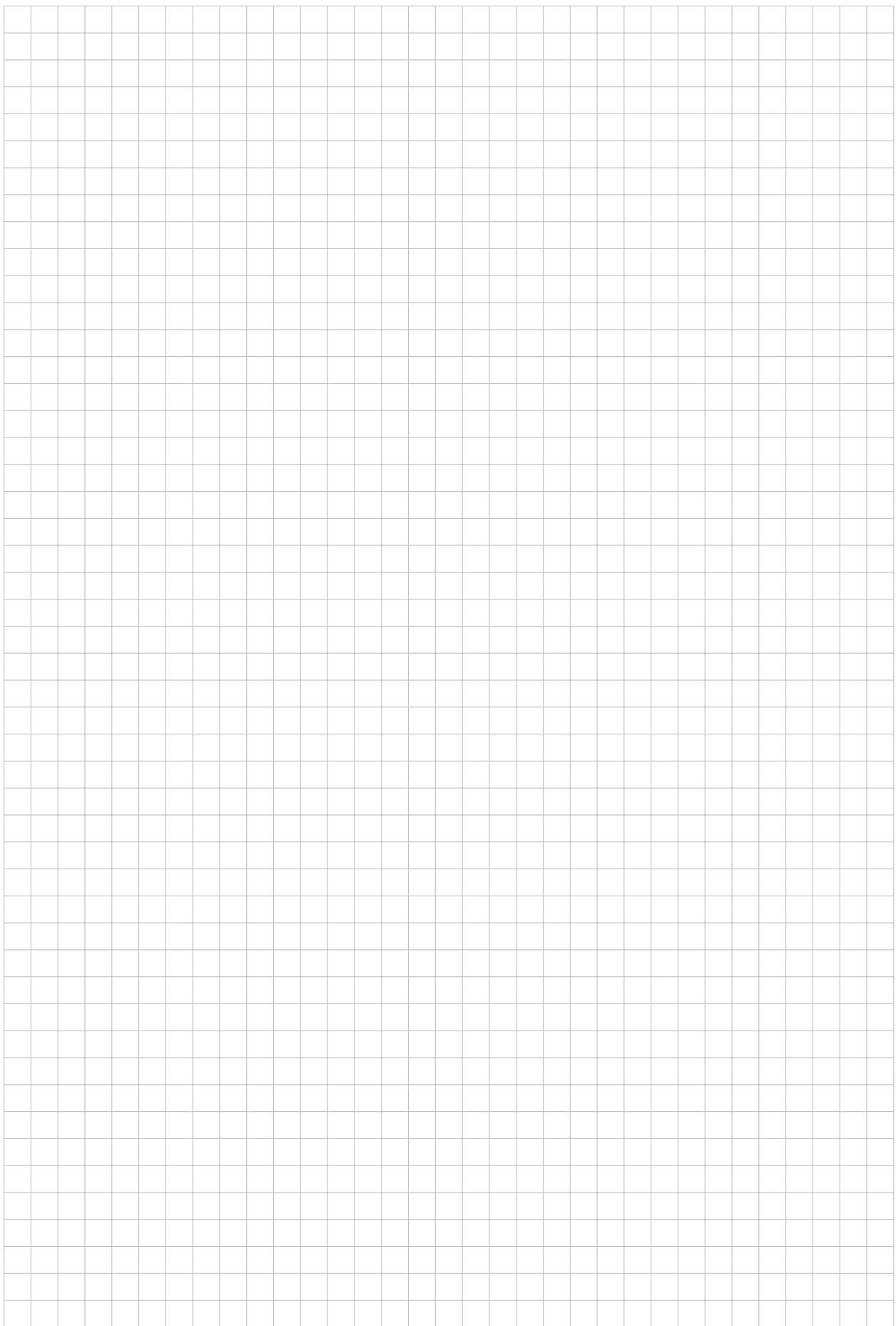


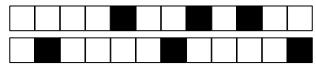
+148/14/35+





+148/15/34+





+148/16/33+

