

Série 8 du mercredi 12 mars 2025

Exercice 1.

On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ sinon.} \end{cases} \tag{1.1}$$

1) Calculer les grandeurs suivantes pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) \ ; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y) \ ; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0). \tag{1.4}$$

2) Montrer que les dérivées partielles secondes mixtes (1.3)–(1.4) sont définies sur $\mathbb{R}^2$ mais diffèrent en $(0,0)$.
3) Le point 2 contredit-il le théorème de Schwarz ?

Exercice 2.

Définition 1 (Fonction höldérienne)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, borné, convexe et non-vide. Pour $\alpha \in]0,1]$, on dit qu'une fonction $\boldsymbol{h} : E \to \mathbb{R}^m$ est α-höldérienne si

$$\exists C \in]0,+\infty[, \forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in E, \quad \|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\| \leqslant C\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^\alpha. \tag{2.1}$$

Les fonctions 1-höldériennes sont appelées « lipschitziennes ».

Conservons les notations de la définition 1.

1) Soit $f \in \mathrm{C}^1(E,\mathbb{R})$ dont les dérivées partielles sont bornées.
   a) Pour quelles valeurs de $\alpha \in]0,1]$ f est-elle α-höldérienne ?
   b) Montrer que f est uniformément continue sur E.
2) Soit $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1(E,\mathbb{R}^m)$ dont les dérivées partielles sont bornées. Les résultats du point 1 sont-ils toujours valables ?

   Indication. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et $\boldsymbol{g} \in \mathrm{C}^0(K,\mathbb{R}^m)$. Alors

$$\left\| \int_K \boldsymbol{g} \right\| \leqslant \int_K \|\boldsymbol{g}\|, \tag{2.2}$$

   où l'intégrale $\int_K \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^m$ s'obtient en intégrant chaque composante de $\boldsymbol{g}$. Ce résultat est vrai pour n'importe quelle norme.

3) Montrer le résultat de l'indication ci-dessus pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 3.

Pour $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on définit $\Delta f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par

$$\Delta f(x, y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y). \tag{3.1}$$

On appelle Δf le « laplacien de f ». On définit $g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \tag{3.2}$$

Vérifier que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta). \tag{3.3}$$

Exercice 4.

Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1) Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ unitaire (i.e. $\|\boldsymbol{v}\| = 1$) ; pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ donné nous notons $g_{\boldsymbol{x}} := t \mapsto f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$|g_{\boldsymbol{x}}'(0)| \leqslant \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|.$$

Donner un critère d'égalité.

2) Soit $\gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ une courbe paramétrée telle que $\forall s \in [0, 1]$, $\|\gamma'(s)\| = 1$. Montrer que

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))| \leqslant \int_0^1 \|\nabla f(\gamma(s))\| \,\mathrm{d}s.$$