

Série 7 du lundi 10 mars 2025

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \ln(|x_1| + |x_2|), & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \quad (1.1)$$

Montrer que f est de classe C^1 .

Exercice 2.

Soit $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application qui satisfait $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est inversible en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et soit $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ les trois fonctions données par :

$$g_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_2 \sin y_3, \quad (3.1)$$

$$g_2(y_1, y_2, y_3) = y_1 \sin y_2 \sin y_3, \quad (3.2)$$

$$g_3(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_3. \quad (3.3)$$

On définit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ comme $F(y_1, y_2, y_3) = f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$ où

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), g_3(\mathbf{y})) = (g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), g_3(y_1, y_2, y_3)). \quad (3.4)$$

- 1) Calculer explicitement $F(\mathbf{y})$.
- 2) Calculer $\nabla F(\mathbf{a})$ où $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
- 3) Vérifier, dans ce cas particulier, que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}). \quad (3.5)$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On note $F := f \circ \|\cdot\|$, c'est-à-dire, $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2, x_3) = f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$. Calculer le gradient $\nabla F(\mathbf{x})$ en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.