Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-03 au 2025-03-07

Série 5 du lundi 3 mars 2025

Exercice 1.

Soit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue et $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide.

1) Montrer que $\boldsymbol{f}(\overline{E}) \subset \overline{\boldsymbol{f}(E)}$.
2) Donner un exemple de fonction $\boldsymbol{f}$ et ensemble E pour lesquels l'inclusion du point précédent est stricte.

Exercice 2.

Soit $E = ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y) \in E$.

1) f est-elle continue sur E ?
2) f est-elle uniformément continue sur E ?

Exercice 3.

Soit un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$.

1) Montrer la caractérisation suivante des fonctions continues. En supposant E ouvert, une fonction $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est continue (i.e. $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^0(E, \mathbb{R}^m)$) si et seulement si la préimage $\boldsymbol{f}^{-1}(V)$ de chaque ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ est aussi ouverte.
2) Montrer que si E est compact et $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $\boldsymbol{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ est compact.
3) Montrer que si E est connexe par arcs et $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $\boldsymbol{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ est connexe par arcs.

Exercice 4.

Définition 1 (Fonction höldérienne)**.** On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est α-höldérienne, pour $\alpha \in]0,1]$, si

$$\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^\alpha} < \infty. \tag{4.1}$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1) Montrer que si $\boldsymbol{f}$ est α-höldérienne, alors $\boldsymbol{f}$ est uniformément continue sur E.
2) Utiliser cette propriété pour montrer que la fonction $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{|x_1 - x_2|} \tag{4.2}$$

est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.

Indication. Utiliser la propriété que, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.