Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-03 au 2025-03-07

# Série 5 du lundi 3 mars 2025

## Exercice 1.

Soit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue et $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide.

1) Montrer que $\boldsymbol{f}(\overline{E}) \subset \overline{\boldsymbol{f}(E)}$.
2) Donner un exemple de fonction $\boldsymbol{f}$ et ensemble $E$ pour lesquels l'inclusion du point précédent est stricte.

## Solution

1) Soit $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$. Par définition de l'adhérence, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_n)$ d'éléments de $E$ telle que

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Comme $\boldsymbol{f}$ est continue, on a

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Puisque chaque $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$ appartient à $\boldsymbol{f}(E)$, la limite $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est une valeur limite d'une suite d'éléments de $\boldsymbol{f}(E)$. Par la caractérisation des ensembles fermés par les suites, on en déduit que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \overline{\boldsymbol{f}(E)}.$$

Ainsi, pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$, on a montré que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \overline{\boldsymbol{f}(E)}$, ce qui implique

$$\boldsymbol{f}(\overline{E}) \subset \overline{\boldsymbol{f}(E)}.$$

On peut aussi prouver ce résultat en utilisant le fait que si $\boldsymbol{f}$ est continue et si $E$ est fermé, alors $\boldsymbol{f}^{-1}(E)$ est fermé.

*Rappel* 1. $A \subset \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(A))$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(B)) \subset B$.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Notons que $E \subset \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(E)) \subset \boldsymbol{f}^{-1}\overline{(\boldsymbol{f}(E))}$. Donc,

$$\overline{E} \subset \overline{\boldsymbol{f}^{-1}(\overline{\boldsymbol{f}(E)})} = \boldsymbol{f}^{-1}\overline{(\boldsymbol{f}(E))}.$$

car $\boldsymbol{f}^{-1}\overline{(\boldsymbol{f}(E))}$ est fermée parce-que $f$ est continue. Donc :

$$\boldsymbol{f}(\overline{E}) \subset \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(\overline{\boldsymbol{f}(E)}) \subset \overline{(\boldsymbol{f}(E))}.$$

2) On peut prendre par exemple $\boldsymbol{f}(x) = \arctan(x)$ pour laquelle

$$\boldsymbol{f}(\overline{\mathbb{R}}) = \boldsymbol{f}(\mathbb{R}) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \neq \overline{\boldsymbol{f}(\mathbb{R})} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

# Exercice 2.

Soit $E = ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y) \in E$.

1) $f$ est-elle continue sur $E$ ?
2) $f$ est-elle uniformément continue sur $E$ ?

## Solution

1) $f$ est continue sur $E$ pour les raisons habituelles ($(0,0)$ ne fait pas partie de $E$).
2) On constate que

$$\lim_{t \to 0^+} f(t,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.1}$$

alors que

$$\lim_{t \to 0^+} f(0,t) = 0. \tag{2.2}$$

Ainsi $f$ n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$. A fortiori, elle ne peut pas être uniformément continue sur $E$.

# Exercice 3.

Soit un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$.

1) Montrer la caractérisation suivante des fonctions continues. En supposant $E$ ouvert, une fonction $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est continue (i.e. $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^0(E, \mathbb{R}^m)$) si et seulement si la préimage $\boldsymbol{f}^{-1}(V)$ de chaque ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ est aussi ouverte.
2) Montrer que si $E$ est compact et $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $\boldsymbol{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ est compact.
3) Montrer que si $E$ est connexe par arcs et $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $\boldsymbol{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ est connexe par arcs.

## Solution

1) Prouvons l'équivalence en deux étapes.

« $\Longrightarrow$ » Supposons $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ continue. Soit $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $U = \boldsymbol{f}^{-1}(V) \subset E$. Montrons que $U$ est ouvert. Soit $\boldsymbol{x} \in U$. Puisque $\boldsymbol{x} \in E$ avec $E$ ouvert, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta_1) \subset E$. Posons $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in V$. Puisque $V$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{y}, \varepsilon) \subset V$. Puisque $\boldsymbol{f}$ est continue au point $\boldsymbol{x}$, il existe $\delta \in \,]0, \delta_1[$ tel que $\boldsymbol{f}(\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta)) \subset \mathrm{B}(\boldsymbol{y}, \varepsilon) \subset V$. On a alors $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset U$, ce qui montre que $U$ est ouvert.

« $\Longleftarrow$ » Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Montrons que $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x}$. Soit $\varepsilon > 0$. La boule $\mathrm{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \varepsilon)$ est ouverte dans $\mathbb{R}^m$. Ainsi $A = \boldsymbol{f}^{-1}(\mathrm{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \varepsilon))$ est ouvert (par hypothèse) et contient $\boldsymbol{x}$. Par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset A$, d'où $\boldsymbol{f}(\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta)) \subset \mathrm{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \varepsilon)$. Ceci s'écrit aussi $\forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta)$, $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| < \varepsilon$.

2) Utilisons la caractérisation séquentielle de la compacité. Soit une suite $(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \boldsymbol{f}(E)$ ; prouvons qu'elle admet une sous-suite qui converge vers un élément de $\boldsymbol{f}(E)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, choisissons $\boldsymbol{x}_k \in E$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{y}_k$. Puisque $E$ est supposé compact, la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{s(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\boldsymbol{x} \in E$. La continuité de $\boldsymbol{f}$ donne

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{y}_{s(k)} = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{s(k)}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(E) \tag{3.1}$$

et donc la sous-suite $(\boldsymbol{y}_{s(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(E)$.

On peut aussi montrer directement que $\boldsymbol{f}(E)$ est borné et fermé.

$\boldsymbol{f}(E)$ *borné.* Par contradiction, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{f}(E)$ tel que $\|\boldsymbol{y}_n\| \geqslant n$. Soit $\boldsymbol{x}_n \in E$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}_n$. $E$ étant compact, de la suite $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\{\boldsymbol{x}_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\boldsymbol{x} \in E$. Puisque $\boldsymbol{f}$ est continue, on a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{y}_{n_i}$ et $\infty > \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| \geqslant \|\boldsymbol{y}_{n_i}\| - \|\boldsymbol{y}_{n_i} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| \to \infty$, ce qui est contradictoire.

$\boldsymbol{f}(E)$ *fermé.* On va montrer que $f(E)$ est fermé à l'aide de suites. Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ et $(\boldsymbol{y}_n)_{n=0}^{\infty} \subset \boldsymbol{f}(E)$ une suite qui converge vers $\boldsymbol{y}$ ; montrons que $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{f}(E)$. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{f}(E)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \boldsymbol{x}_n \in E$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}_n$. $E$ étant borné, d'après le théorème de Bolzano–Weierstraß dans $\mathbb{R}^n$, il existe une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{n_i})_{i=0}^{\infty}$ qui converge vers un certain $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, et $\boldsymbol{x} \in E$ car $E$ est fermé. Comme $\boldsymbol{f}$ est continue,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\lim_{i\to+\infty} \boldsymbol{x}_{n_i}) = \lim_{i\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n_i}) = \lim_{i\to+\infty} \boldsymbol{y}_{n_i} = \boldsymbol{y}. \tag{3.2}$$

On a donc montré qu'il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, donc $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{f}(E)$ et $\boldsymbol{f}(E)$ est fermé.

3) Soit $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{f}(E)$ ; on choisit $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$ tels que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$. Puisque $E$ est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma \in \mathrm{C}^0([0,1], E)$ tel que $\gamma(0) = \boldsymbol{x}_1$ et $\gamma(1) = \boldsymbol{x}_2$. En tant que composition de fonctions continues, $\boldsymbol{f} \circ \gamma \in \mathrm{C}^0([0,1], \boldsymbol{f}(E))$. De plus, $\boldsymbol{f}(\gamma(0)) = \boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{f}(\gamma(1)) = \boldsymbol{y}_2$. Par conséquent, $\boldsymbol{f}(E)$ est connexe par arcs.

# Exercice 4.

**Définition 1** (Fonction höldérienne)**.** On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est $\alpha$-höldérienne, pour $\alpha \in ]0,1]$, si

$$\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^\alpha} < \infty. \tag{4.1}$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1) Montrer que si $\boldsymbol{f}$ est $\alpha$-höldérienne, alors $\boldsymbol{f}$ est uniformément continue sur $E$.
2) Utiliser cette propriété pour montrer que la fonction $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{|x_1 - x_2|} \tag{4.2}$$

est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.

*Indication.* Utiliser la propriété que, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

## Solution

1) Par hypothèse, $\exists C > 0 : \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^\alpha} < C$ et on veut vérifier que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, \quad \big(\boldsymbol{y} \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{x}, \delta) \implies \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \epsilon)\big). \tag{4.3}$$

En choisissant $\delta(\epsilon) = \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$, on obtient que $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, si $\boldsymbol{y} \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{x}, \delta(\epsilon))$ alors,

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leqslant C\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^\alpha < C \times \frac{\epsilon}{C} < \epsilon. \tag{4.4}$$

2) On montre que $f$ est $\alpha$-höldérienne. Soient $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2)$ et $\boldsymbol{y} := (y_1, y_2)$ dans $[-1, 1]^2$ ; posons $a := |y_1 - y_2|$, $b := |x_1 - x_2|$. Alors

$$\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| = \left|\sqrt{|y_1 - y_2|} - \sqrt{|x_1 - x_2|}\right| &\leqslant \sqrt{||y_1 - y_2| - |x_1 - x_2||} &(4.5)\\
&\leqslant \sqrt{|y_1 - y_2 - x_1 + x_2|} &(4.6)\\
&\leqslant \sqrt{|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|} &(4.7)\\
&= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1^{1/2}. &(4.8)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f$ est $1/2$-höldérienne, donc uniformément continue.