Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-02-24 au 2025-02-28

Série 4 du mercredi 26 février 2025

Exercice 1.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} e^{-y/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Exercice 2.

Calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}. \tag{2.1}$$

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3.1}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0. \tag{3.2}$$

2) Peut-on en déduire que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$?

Exercice 4.

1) Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. Montrer que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$ si et seulement s'il existe $R > 0$ et une fonction $g :]0, R[\to \mathbb{R}_+$ tels que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ et, pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\})$, $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Le choix de la norme n'est pas important.

2) Utiliser le critère du point 1 pour montrer que les fonctions suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, ont pour limite 0 en $(0,0)$:

$$f_1(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \tag{4.1}$$

$$f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{4.2}$$