Analyse avancée II
Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-02-24 au 2025-02-28

Série 4 du mercredi 26 février 2025

Exercice 1.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} e^{-y/x^2} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Solution

On considère la fonction

$$g(x,y) := \frac{x^2}{y} e^{\frac{y}{x^2}} \tag{1.2}$$

définie pour (x,y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a bien sûr $\frac{1}{f(x,y)} = g(x,y)$.

Soit $C > 0$.

— Puisque $\lim_{s\to 0^+} se^{1/s} = +\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$se^{1/s} \geqslant C, \ \forall s \in]0,\varepsilon]. \tag{1.3}$$

— Il existe $\delta \in]0,1[$ tel que $0 \leqslant \frac{x^2}{y} \leqslant \varepsilon$ si $|x| \leqslant \delta$ et $|y-1| \leqslant \delta$. Par exemple $\delta = \min\{1/2, \sqrt{\varepsilon/2}\}$.

— Ainsi, si $0 < |x| \leqslant \delta$ et $|y-1| \leqslant \delta$, on obtient $g(x,y) \geqslant C$ et $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1/C$. Comme $f(0,y) = 0$, ceci prouve que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0. \tag{1.4}$$

Exercice 2.

Calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}. \tag{2.1}$$

Solution

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, on note $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ et $\|\boldsymbol{x}\| := \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. On a

$$\frac{\ln\left(\frac{1+x_1^4+x_2^4}{1+\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} = \frac{\ln(1+x_1^4+x_2^4)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} - \frac{\ln(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)}. \tag{2.2}$$

Étudions ces deux limites séparément. D'une part,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{\ln(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(1+r^2)}{\sin(r^2)} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\ln(1+s)}{\sin s} = 1. \tag{2.3}$$

D'autre part, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathrm{B}(0, \sqrt{\pi}) \setminus \{0\}$,

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+x_1^4+x_2^4)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} \leqslant \frac{\ln(1+\|\boldsymbol{x}\|^4)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} \xrightarrow{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} 0. \tag{2.4}$$

Ainsi, en utilisant le théorème des deux gendarmes dans (2.4),

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x_1^4+x_2^4}{1+\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} = -1. \tag{2.5}$$

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3.1}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0. \tag{3.2}$$

2) Peut-on en déduire que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$?

Solution

1) Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2 + (1-\frac{y}{x})^2} = 0 \tag{3.3}$$

et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$, on a finalement que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0. \tag{3.4}$$

2) Non : $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0)$.

Exercice 4.

1) Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. Montrer que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$ si et seulement s'il existe $R > 0$ et une fonction $g :]0, R[\to \mathbb{R}_+$ tels que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ et, pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\})$, $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Le choix de la norme n'est pas important.
2) Utiliser le critère du point 1 pour montrer que les fonctions suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, ont pour limite 0 en $(0,0)$:

$$f_1(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \tag{4.1}$$

$$f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{4.2}$$

Solution

1) Prouvons séparément chaque implication.

« $\Longrightarrow$ » Soit $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$ et choisissons $R > 0$ tel que $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| < 1$ pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\})$.

Définissons la fonction croissante $g :]0, R[\to [0,1]$ par

$$g(r) = \sup\Big\{|f(\boldsymbol{x}) - \ell| : \boldsymbol{x} \in \overline{B}(\boldsymbol{x}_0, r) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\})\Big\}. \tag{4.3}$$

Clairement, $\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}), |f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Montrons que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$. On a que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in]0, R[, \forall \boldsymbol{x} \in E, \quad (0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta \implies |f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant \epsilon), \tag{4.4}$$

ce qui implique $g(\delta) \leqslant \epsilon$, $0 \leqslant g(r) \leqslant g(\delta) \leqslant \epsilon$ pour tout $0 < r \leqslant \delta$ et donc $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$.

« $\Longleftarrow$ » Soit $g :]0, R[\to \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ et $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$ pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\})$. Puisque $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|) = 0$, le théorème des deux gendarmes implique $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$.

2) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, posons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a

$$|f_1(x,y)| \leqslant \frac{r^3 + r^3}{r^2} = 2r := g_1(r) \tag{4.5}$$

et

$$|f_2(x,y)| \leqslant \frac{|xy|}{r} \leqslant \frac{r^2}{r} = r := g_2(r) \tag{4.6}$$

avec $\lim_{r\to 0^+} g_1(r) = \lim_{r\to 0^+} g_2(r) = 0$.