Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-02-24 au 2025-02-28

Série 3 du lundi 24 février 2025

Exercice 1. (exercice proposé la semaine dernière)

Rappel 1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, non-vide.

— Le *complémentaire* de E est $E^{\complement} := \mathbb{R}^n \setminus E := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \notin E\}$.

— E est *ouvert* si, $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\exists \delta \in]0, +\infty[$, tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset E$.

— E est *fermé* si son complémentaire est ouvert.

En utilisant les définitions ci-dessus, montrer les propriétés suivantes :

1) E est ouvert si et seulement si $E = \mathring{E}$;
2) $(\mathring{E^{\complement}}) = (\overline{E})^{\complement}$; [1]
3) $(\mathring{E})^{\complement} = \overline{E^{\complement}}$;
4) E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.

Exercice 2.

1) Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, tous deux non-vides et tels que $E \cap F = \varnothing$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in F$ tels que

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in F\} > 0. \tag{2.1}$$

2) En utilisant le point précédent, montrer que si G est un sous-ensemble strict (i.e. $G \subsetneq \mathbb{R}^n$) non-vide, alors sa frontière ∂G n'est pas vide.

Exercice 3.

Notons $E = \{(x, \sin {}^1\!/_x) : x \in]0, +\infty[\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.
2) Donner une description explicite de $\overline{E}$.
3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

1. N.B. $(\mathring{E^{\complement}})$ est l'intérieur de $E^{\complement}$.

Exercice 4.

Soit un nombre réel $\lambda > 0$ et, pour chaque entier $n \geqslant 1$, soit

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2} \right\}$$

le disque fermé centré en $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ de rayon $\frac{\lambda}{n}$. Sous quelle condition sur λ l'ensemble $D := \cup_{n\geqslant 1} D_n$ est-il fermé ?

- ☐ exactement lorsque $\lambda = 1$
- ☐ D n'est jamais fermé
- ☐ exactement lorsque $\lambda \geqslant \sqrt{2}$
- ☐ exactement lorsque $0 < \lambda < \sqrt{2}$

Exercice 5.

Soit $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ une suite d'ouverts. Alors $A := \cap_{k=1} A_k$ est ouvert.

☐ VRAI ☐ FAUX