Analyse avancée II
Mathématiques 1^{ère} année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-02-17 au 2025-02-21

Série 2 du mercredi 19 février 2025

Exercice 1.

Soit V l'ensemble de toutes les suites réelles dont seulement un nombre fini d'éléments sont non-nuls.

1) Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Définissons l'application sur V

$$N : v \mapsto \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i^2}.$$

Prouver que N est une norme sur V.

3) Le théorème de Bolzano–Weierstrass, tel que formulé sur $\mathbb{R}^n$, est-il toujours vrai sur V équipé de la norme N ?

Exercice 2.

Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}, \tag{2.1}$$
$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}, \tag{2.2}$$
$$\Omega_3 := \left\{(x_1, x_2) \in \,]0,1[\, \times \mathbb{R} : \sin\frac{1}{x_1} < x_2 < 2\right\}, \tag{2.3}$$
$$\Omega_4 := \{(x_1, x_2) \in \,]0,1[\, \times \mathbb{R} : x_2 \in \,]1,5[\text{ si } x_1 \in \mathbb{Q}; x_2 \in \,]0,5[\text{ sinon}\}, \tag{2.4}$$
$$\Omega_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 \leqslant 1\right\}. \tag{2.5}$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ? Sont-ils bornés ? Justifiez vos réponses. Quel est leur bord ?

Exercice 3.

Montrer que l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble fermé minimal contenant E.

Exercice 4.

Rappel 1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, non-vide.

— Le *complémentaire* de E est $E^{\complement} := \mathbb{R}^n \setminus E := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \notin E\}$.

— E est *ouvert* si, $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\exists \delta \in]0, +\infty[$, tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset E$.

— E est *fermé* si son complémentaire est ouvert.

En utilisant les définitions ci-dessus, montrer les propriétés suivantes :

1) E est ouvert si et seulement si $E = \mathring{E}$;

2) $(\mathring{E^{\complement}}) = (\overline{E})^{\complement}$; [1]

3) $(\mathring{E})^{\complement} = \overline{E^{\complement}}$;

4) E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.

1. N.B. $(\mathring{E^{\complement}})$ est l'intérieur de $E^{\complement}$.