Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-02-17 au 2025-02-21

Série 2 du mercredi 19 février 2025

Exercice 1.

Soit V l'ensemble de toutes les suites réelles dont seulement un nombre fini d'éléments sont non-nuls.

1) Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Définissons l'application sur V

$$N : v \mapsto \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i^2}.$$

   Prouver que N est une norme sur V.
3) Le théorème de Bolzano–Weierstrass, tel que formulé sur $\mathbb{R}^n$, est-il toujours vrai sur V équipé de la norme N ?

Solution

Rappel 1. Un ensemble E est un *espace vectoriel réel* si les opérations de somme « + » et proportion [1] « $\cdot$ » sont définies sur E avec les propriétés suivantes.

Somme : $E \times E \ni (x, y) \mapsto x + y \in E$.

- $\forall x, y, z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$.
- $\exists y \in E$, $\forall x \in E$, $x + y = x$: ce « neutre additif » y est généralement noté 0_E, ou simplement 0.
- $\forall x \in E$, $\exists y \in E$, $x+y = 0$: cet « inverse additif » (ou « opposé ») de x est généralement noté $-x$.

Proportion : $\mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \in E$.

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$.
- $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

1) Soit $(u, v) \in V^2$. La loi $+$ sur V est définie par rapport à la loi $+$ sur $\mathbb{R}$ – notées aussi respectivement $+_V$ et $+_\mathbb{R}$ – avec $u +_V v = (u_i +_\mathbb{R} v_i)_{i\in\mathbb{N}}$. $(V, +)$ est un groupe abélien car $+_V$
   - est interne à V (car $u + v \in V$), et
   - hérite naturellement des propriétés d'associativité, de commutativité, d'unitarité et d'inversibilité de $+_\mathbb{R}$.

1. Multiplication par un scalaire (i.e. réel ici)

Soit $r \in \mathbb{R}$. La loi $\cdot$ sur V est définie par rapport à la loi $\times$ sur $\mathbb{R}$, avec $r \cdot u = (r \times u_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Quant à ses propriétés :

— elle est interne à V, car $r \cdot u \in V$;
— elle est associative par rapport à $\times$;
— elle est unitaire, et son élément neutre est l'élément neutre de $\times$;
— elle est distributive par rapport à $+_V$ et à $+_{\mathbb{R}}$.

Par conséquent, $(V, +, \cdot)$ est un espace vectoriel de corps $\mathbb{R}$.

2) N est définie sur V, puisque tout élément de V n'a qu'un nombre fini de termes non-nuls. N est également positive puisque, pour tout $v \in V$, il est évident que $N(v) \geqslant 0$. Elle est même définie positive car, si $N(v) = 0$, alors $\forall i \in \mathbb{N}, v_i = 0$, i.e. $v = 0_V$. De plus, N est absolument homogène car, $\forall r \in \mathbb{R}$, $N(r \cdot v) = \sqrt{r^2 \sum_{i \in \mathbb{N}} v_i^2} = |r| N(v)$. Enfin, pour tous $v, w \in V$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_i = w_i = 0$ pour tout $i > n$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$N(v + w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = N(v) + N(w). \tag{1.1}$$

Par conséquent, N vérifie l'inégalité triangulaire. N est donc une norme.

3) Pour $i \in \mathbb{N}$, soit la suite $\delta_i \in V$ dont tous les éléments sont nul, sauf le $i - me$, qui vaut 1. Par exemple

$$\delta_0 = (1, 0, 0, 0, ...) \in V, \quad \delta_1 = (0, 1, 0, 0, ...) \in V, \quad \delta_2 = (0, 0, 1, 0, 0, ...) \in V.$$

Observons que $N(\delta_0 - \delta_1) = N(\ (1, -1, 0, 0, ...)\ ) = \sqrt{2}$; plus généralement $N(\delta_k - \delta_\ell) = \sqrt{2}$ pour tous $k \neq \ell$.
Considérons la suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset V$. N.B. $N(\delta_i) = 1$ pour tout i. Aucune sous-suite $(\delta_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ne peux converger, car une telle sous-suite devrait satisfaire $N(\delta_{i_k} - \delta_{i_\ell}) < \sqrt{2}$ pour tous k, ℓ suffisamment grands. Avec plus de détails, supposons par l'absurde qu'une sous-suite $(\delta_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $v \in V$, ce qui signifie $\lim_{k \to \infty} N(\delta_{i_k} - v) = 0$. On aurait alors la contradiction

$$N(\delta_{i_k} - \delta_{i_\ell}) \leqslant N(\delta_{i_k} - v) + N(v - \delta_{i_\ell}) < \sqrt{2}$$

pour tous k, ℓ suffisamment grands.

Exercice 2.

Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}, \tag{2.1}$$

$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}, \tag{2.2}$$

$$\Omega_3 := \left\{(x_1, x_2) \in]0, 1[\times \mathbb{R} : \sin \frac{1}{x_1} < x_2 < 2\right\}, \tag{2.3}$$

$$\Omega_4 := \{(x_1, x_2) \in]0, 1[\times \mathbb{R} : x_2 \in]1, 5[\text{ si } x_1 \in \mathbb{Q}; x_2 \in]0, 5[\text{ sinon}\}, \tag{2.4}$$

$$\Omega_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leqslant 1\right\}. \tag{2.5}$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ? Sont-ils bornés ? Justifiez vos réponses. Quel est leur bord ?

Solution

Remarque préliminaire : les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverts et fermés sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$.

1) L'ensemble Ω_1 est une couronne centrée à l'origine. Ω_1 est borné car $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_2 < 4$. Montrons qu'il est ouvert : considérons $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2) \in \Omega_1$ et

$$\delta := \min\left\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1, 4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}. \tag{2.6}$$

Alors

$$B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \Omega_1 \tag{2.7}$$

(faire un dessin). Prouvons (2.7) en étudiant un quelconque $\boldsymbol{y} \in B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, \delta)$. Par définition de δ, on a

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 < \|\boldsymbol{x}\|_2 - 1 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 < 4 - \|\boldsymbol{x}\|_2. \tag{2.8}$$

Cela conduit à

$$\|\boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 + \|\boldsymbol{x}\|_2 < 4 - \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{x}\|_2 = 4 \tag{2.9}$$

et

$$\|\boldsymbol{y}\|_2 \geqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 > \|\boldsymbol{x}\|_2 - (\|\boldsymbol{x}\|_2 - 1) = 1. \tag{2.10}$$

On a donc $\boldsymbol{y} \in \Omega_1$, ce qui prouve (2.7).
Ω_1 étant ouvert, mais différent de $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$, il ne peut pas être fermé.
Son bord est

$$\partial\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 16\}. \tag{2.11}$$

Pour le prouver : si $x_1^2 + x_2^2 = 1$ et si $\delta > 0$, on vérifie que $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, \delta) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$ et $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, \delta) \cap \Omega_1^c \neq \varnothing$; de même si $x_1^2 + x_2^2 = 16$. Vérifier encore qu'il n'y a pas d'autres points possibles dans le bord.

2) Soit $(x_1, x_2) \in \Omega_2$. On a

$$1 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = y_1 y_2 \tag{2.12}$$

avec

$$y_1 := x_1 - x_2, \quad y_2 := x_1 + x_2. \tag{2.13}$$

Or l'équation « $y_1 y_2 = 1$ » décrit une hyperbole dans le système d'axe Oy_1y_2.
Il s'agit d'un ensemble fermé. Pour le prouver, montrons que son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$, i.e. $\Omega_2^c := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 \neq 1\}$, est ouvert. Considérons un point $\boldsymbol{z} := (z_1, z_2) \in \Omega_2^c$ et montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{z}, \delta) \subset \Omega_2^c$ (notez la norme utilisée). Sans

restriction de généralité[2] supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z_1^2 - z_2^2 - 1 = \varepsilon$. Soient $\delta \in]0, +\infty[$, et $\boldsymbol{w} := (w_1, w_2) \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{z}, \delta)$. Alors $\boldsymbol{w}$ s'écrit

$$\begin{cases} w_1 = z_1 + \delta_1, \\ w_2 = z_2 + \delta_2, \end{cases} \quad \text{avec} \quad |\delta_1| + |\delta_2| < \delta, \tag{2.14}$$

et vérifie

$$w_1^2 - w_2^2 - 1 = z_1^2 - z_2^2 - 1 + 2\delta_1 z_1 - 2\delta_2 z_2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 \tag{2.15}$$
$$> \varepsilon - (2\delta\,(|z_1| + |z_2|) + 2\delta^2) > \varepsilon/2 \tag{2.16}$$

si $\delta > 0$ est choisi tel que $2\delta\,(|z_1| + |z_2|) < \varepsilon/4$ et $2\delta^2 < \varepsilon/4$. Pour un tel choix de $\delta > 0$, on a $\boldsymbol{w} \in \Omega_2^c$. On en conclut que $B_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{z}, \delta) \subset \Omega_2^c$ et Ω_2^c est ouvert.

Ω_2 n'est pas borné car il contient $(\sqrt{1 + x_2^2}\,, x_2)$ avec $|x_2|$ pouvant être choisi arbitrairement grand. On vérifie que le bord de Ω_2 est Ω_2 lui-même.

3) Ω_3 est un ensemble ouvert. Soit $\overline{\boldsymbol{x}} := (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \Omega_3$. Cherchons $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ de sorte que $]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\times]\overline{x}_2 - \delta_2, \overline{x}_2 + \delta_2[\subset \Omega_3$. En imposant $\delta_1 \leqslant \min\{\overline{x}_1, 1 - \overline{x}_1\}$, on s'assure déjà que $]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\subset]0, 1[$. En imposant $\delta_2 \leqslant 2 - \overline{x}_2$, on s'assure aussi que $]\overline{x}_2 - \delta_2, \overline{x}_2 + \delta_2[\subset] - \infty, 2[$.
Comme $\overline{x}_2 - \sin(\overline{x}_1^{-1}) > 0$, on peut choisir $\delta_2 \in]0, 2 - \overline{x}_2]$ vérifiant $2\delta_2 \leqslant \overline{x}_2 - \sin(\overline{x}_1^{-1})$. Puisque la fonction $x \mapsto \sin(x^{-1})$ est continue en $\overline{x}_1$, on a l'existence de

$$\delta_1 \in]0, \min\{\overline{x}_1, 1 - \overline{x}_1\}]$$

tel que, pour tout $x_1 > 0$ vérifiant $|x_1 - \overline{x}_1| < \delta_1$,

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - \sin\left(\frac{1}{\overline{x}_1}\right)\right| < \delta_2. \tag{2.17}$$

Finalement si $(x_1, x_2) \in]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\times]\overline{x}_2 - \delta_2, \overline{x}_2 + \delta_2[$ alors

$$\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) < \sin\left(\frac{1}{\overline{x}_1}\right) + \delta_2 = \sin\left(\frac{1}{\overline{x}_1}\right) + 2\delta_2 - \delta_2$$
$$\leqslant \sin\left(\frac{1}{\overline{x}_1}\right) + (\overline{x}_2 - \sin(\overline{x}_1^{-1})) - \delta_2 = \overline{x}_2 - \delta_2 < x_2.$$

Comme on avait déjà $]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\subset]0, 1[$ et $\overline{x}_2 + \delta_2 < 2$, cela montre que $B_{\|\cdot\|_\infty}(\overline{\boldsymbol{x}}, \min(\delta_1, \delta_2)) \subset \Omega_3$. Il est vivement conseillé d'agrémenter cette preuve d'un dessin.
L'ensemble Ω_3 est borné car, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_3$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant 3$. Le bord de Ω_3 est donné par

$$\partial\Omega_3 := \Big\{(x_1, \sin(x_1^{-1})) : x_1 \in]0, 1]\Big\}$$
$$\cup \Big(\{0\} \times [-1, 2]\Big) \cup \Big([0, 1] \times \{2\}\Big) \cup \Big(\{1\} \times [\sin 1, 2]\Big). \tag{2.18}$$

Montrons seulement que $\{0\} \times [-1, 1] \subset \partial\Omega_3$. En effet, soit $(x_1, x_2) \in \{0\} \times [-1, 1]$ et $\delta \in]0, +\infty[$. Alors $\exists \varepsilon \in]0, \min\{\delta, 1\}[$ tel que $\sin(\varepsilon^{-1}) = -1$.
Dans le cas $x_2 \in]-1, 1]$, on a $(\varepsilon, x_2) \in \Omega_3$ et $(\varepsilon, x_2) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{x}, \delta)$.
Dans le cas $x_2 = -1$, on a $(\varepsilon, x_2 + \varepsilon) \in \Omega_3$ et $(\varepsilon, x_2 + \varepsilon) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{x}, \delta)$.
D'autre part $\boldsymbol{x} \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{x}, \delta) \cap \Omega_3^c \neq \varnothing$.

2. La démarche est identique si on suppose $\varepsilon < 0$.

4) Ω_4 n'est ni ouvert, ni fermé ; considérons en effet deux cas particuliers.
   a) Soit $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2) \in (]0,1[\setminus \mathbb{Q}) \times]0,1[$. Alors $\boldsymbol{x} \in \Omega_4$, mais $B(\boldsymbol{x}, \delta) \not\subset \Omega_4$ pour tout $\delta > 0$, ce qui montre que Ω_4 n'est pas ouvert.
   b) Soit $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2) \in (]0,1[\cap \mathbb{Q}) \times]0,1[$: alors $\boldsymbol{x} \notin \Omega_4$ et $B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap \Omega_4 \neq \varnothing$ pour tout $\delta > 0$. Cela prouve que Ω_4^c n'est pas ouvert, donc Ω_4 *n'est pas fermé.*

   Ω_4 est borné car, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_4$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant 5$. Enfin,

$$\partial\Omega_4 = \Big(\{0,1\} \times [0,5]\Big) \cup \Big([0,1] \times [0,1]\Big) \cup \Big([0,1] \times \{5\}\Big) \tag{2.19}$$

   Vérifions par exemple que $[0,1] \times [0,1] \subset \partial\Omega_4$. Soient $\boldsymbol{x} \in [0,1] \times [0,1]$ et $\delta > 0$: le disque $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ contient des points de Ω_4 et des points de Ω_4^c, ce qui prouve l'inclusion.

5) $\Omega_5 = C_1 \cup C_2$ avec
   — C_1 le disque ouvert centré en $(0,0)$, de rayon 1, et
   — C_2 le disque fermé centré en $(1,1)$ de rayon 1.

   Il n'est pas ouvert car
$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \Omega_5 \setminus \mathring{\Omega}_5.$$
   Il n'est pas fermé car $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_5$ n'est pas ouvert :
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_5) \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_5)^\circ.$$
   Ω_5 est borné, car $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant 1 + \sqrt{2}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega_5$.
   Enfin, en observant que
$$\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\big\} \cap \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1\big\} = \{(1,0)\,,\,(0,1)\},$$
   on obtient
$$\begin{aligned}\partial\Omega_5 = &\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 + x_2 \leqslant 1\big\} \\ &\cup \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1,\ x_1 + x_2 \geqslant 1\Big\}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Exercice 3.

Montrer que l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble fermé minimal contenant E.

Solution

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$ si $\forall \delta \in]0, +\infty[$, $B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap E \neq \varnothing$. Il en résulte que $E \subset \overline{E}$. Dans le cours, nous avons vu que $\overline{E}$ est fermé.

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$, fermé, tel que $F \supset E$. Prouvons que $\overline{E} \subset F$, i.e. que $\mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Puisque $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert, il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$; puisque $E \subset F$, $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. D'où $B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap E = \varnothing$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$.

Exercice 4.

Rappel 2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, non-vide.

— Le *complémentaire* de E est $E^{\complement} := \mathbb{R}^n \setminus E := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \notin E\}$.

— E est *ouvert* si, $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\exists \delta \in]0,+\infty[$, tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \subset E$.

— E est *fermé* si son complémentaire est ouvert.

En utilisant les définitions ci-dessus, montrer les propriétés suivantes :

1) E est ouvert si et seulement si $E = \mathring{E}$;
2) $(\mathring{E^{\complement}}) = (\overline{E})^{\complement}$;[3]
3) $(\mathring{E})^{\complement} = \overline{E^{\complement}}$;
4) E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.

Solution

1) On rappelle que

$$\mathring{E} := \{\boldsymbol{x} \in E : \exists \delta \in]0,+\infty[, \mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \subset E\}, \tag{4.1}$$

donc $\mathring{E} \subset E$. Si E est ouvert, alors $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\exists \delta \in]0,+\infty[$, $\mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \subset E$, donc $\boldsymbol{x} \in \mathring{E}$ et $E \subset \mathring{E}$. On en conclut que $E = \mathring{E}$ si E et ouvert.
Pour l'implication réciproque, supposons $E = \mathring{E}$. Alors pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, on a $\boldsymbol{x} \in \mathring{E}$ et $\exists \delta \in]0,+\infty[$ tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \subset E$. Par conséquent, E est ouvert.

2) Par définition,

$$\overline{E} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \delta \in]0,+\infty[, \mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \cap E \neq \varnothing\}, \tag{4.2}$$

donc

$$\begin{aligned}(\overline{E})^{\complement} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{E} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \delta \in]0,+\infty[, \mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \cap E = \varnothing\} &(4.3)\\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \delta \in]0,+\infty[, \mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \subset E^{\complement}\} &(4.4)\\ &= (\mathring{E^{\complement}}). &(4.5)\end{aligned}$$

3) Par (4.1),

$$\begin{aligned}(\mathring{E})^{\complement} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \delta \in]0,+\infty[, \mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \not\subset E\} &(4.6)\\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \delta \in]0,+\infty[, \mathrm{B}(\boldsymbol{x},\delta) \cap (E^{\complement}) \neq \varnothing\} &(4.7)\\ &= \overline{E^{\complement}}. &(4.8)\end{aligned}$$

4) E fermé $\iff$ $E^{\complement}$ ouvert $\iff$ $E^{\complement} = (\mathring{E^{\complement}})$ $\iff$ $E^{\complement} = (\overline{E})^{\complement}$ $\iff$ $E = \overline{E}$
Autre solution. D'apès un exercice précédent, $\overline{E}$ est le fermé minimal contenant E. Si E est fermé, alors ce fermé minimal est E lui-même : $\overline{E} = E$. Réciproquement, si $\overline{E} = E$, alors E est fermé puisque $\overline{E}$ l'est.

3. N.B. $(\mathring{E^{\complement}})$ est l'intérieur de $E^{\complement}$.