Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-05-26 au 2025-05-30

Série 28 du mercredi 28 mai 2025

Exercice 1.

1) Soient $K \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble compact et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(K,K)$ une suite de fonctions. Supposons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, T_n admet au moins un point fixe ; i.e. il existe $\boldsymbol{x}_n \in K$ tel que $T_n(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_n$. Enfin, supposons que $\lim_{n\to+\infty} T_n(\boldsymbol{x}) =: T(\boldsymbol{x})$ existe pour tout $\boldsymbol{x} \in K$, avec convergence uniforme :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\boldsymbol{x}\in K} \|T(\boldsymbol{x}) - T_n(\boldsymbol{x})\| = 0.$$

Montrer que la fonction $T : K \to K$ ainsi définie admet au moins un point fixe $\boldsymbol{x}_* \in K$.

2) Définissons K comme au point 1. Une application $T : K \to K$ est dite « bien approchée par des contractions » s'il existe une suite de contractions (de K dans lui-même) qui converge uniformément vers T. Définissons maintenant $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ et, pour tout $(\alpha, x, y) \in \,]0, 2\pi[\, \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$R_\alpha(x,y) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer que R_α n'est pas « bien approchée par des contractions ».

Solution

1) Puisque T est limite uniforme sur K de fonctions continues, elle est elle-même continue. En effet, soit $\boldsymbol{x}_0 \in K$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $\sup_{\mathbf{x}\in K} \|T(\mathbf{x}) - T_n(\mathbf{x})\| \leqslant \epsilon/3$. Comme T_N est continue en $\boldsymbol{x}_0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in K \quad \Big(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \|T_N(\boldsymbol{x}) - T_N(\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \epsilon/3\Big).$$

D'où, pour tout $\boldsymbol{x} \in K$ tel que $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$,

$$\|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \|T(\boldsymbol{x}) - T_N(\boldsymbol{x})\| + \|T_N(\boldsymbol{x}) - T_N(\boldsymbol{x}_0)\| + \|T_N(\boldsymbol{x}_0) - T(\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

Ainsi T est continue en tout $\boldsymbol{x}_0 \in K$.
La suite des points fixes $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans K, compact. Elle admet donc une sous-suite $(\mathbf{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\mathbf{x}_* \in K$. On vérifie

$$\begin{aligned}\|T(\mathbf{x}_*) - \mathbf{x}_*\| &= \|\lim_{k\to+\infty} T(\mathbf{x}_{n_k}) - \lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}_{n_k}\| = \lim_{k\to+\infty} \|T(\mathbf{x}_{n_k}) - \mathbf{x}_{n_k}\| = \lim_{k\to+\infty} \|T(\mathbf{x}_{n_k}) - T_{n_k}(\mathbf{x}_{n_k})\| \\ &\leqslant \lim_{k\to+\infty} \max_{\mathbf{x}\in K} \|T(\mathbf{x}) - T_{n_k}(\mathbf{x})\| = 0.\end{aligned}$$

On a donc $T(\mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_*$.

2) Supposons, par l'absurde, que R_α est bien approchée par des contractions et soit donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de contractions $T_n : K \to K$, $n \in \mathbb{N}$, qui converge uniformément vers T. Chaque contraction T_n est continue sur le compact $K \neq \varnothing$ et, d'après le théorème du point fixe de Banach, admet un point fixe $\mathbf{x}_n$ (K_n étant un fermé non vide de $\mathbb{R}^2$). Par la première partie, on a que R_α a un point fixe. Or, clairement une rotation d'angle α différent de $2k\pi$ n'a pas de point fixe, hormis le centre de rotation qui, ici, n'appartient pas à K. D'où la contradiction.

Exercice 2.

Définissons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. Trouver les points stationnaires ainsi que les maximum et minimum globaux de la fonction f restreinte à $\overline{B}((0, 0), 1)$.

Solution

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point stationnaire de f (non restreinte à $D := \overline{B}((0, 0), 1)$) si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

et donc $(x, y) = (0, 0)$. Or on a $(0, 0) \in \mathring{D}$ et de plus $f(0, 0) = 0$. La matrice hessienne de f vaut

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et est donc définie positive (les valeurs propres étant 1 et 3, qui sont > 0), ce qui prouve que $(0, 0)$ est un point de minimum local strict. De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$,

$$\frac{1}{2}(x + y)^2 \geqslant 0 \iff \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy \geqslant 0 \iff f(x, y) \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2) > 0 = f(0, 0).$$

Ainsi le point $(0, 0)$ est même un point de minimum global strict.

Puisque D est un compact non-vide, le maximum de $f|_D$ est atteint. Comme le seul point stationnaire de f sur $\mathring{D}$ est un point de minimum strict, nous savons maintenant que le maximum est atteint sur le bord. On peut le calculer par la méthode de Lagrange. Les points stationnaires de la lagrangienne $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ vérifient

$$2x + y - 2\lambda x = 0, \quad 2y + x - 2\lambda y = 0, \quad -(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Les deux premières équations donnent $(2x + y)y = (2y + x)x$ et donc $x^2 = y^2$. On obtient

$$(x, y) \in \{(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}), (-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}), (\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}), (-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})\}.$$

En évaluant f en ces 4 points et en comparant les valeurs obtenues, nous trouvons que le maximum de f est 1.5 et est atteint en $(2^{-0.5}, 2^{-0.5})$ et $(-2^{-0.5}, -2^{-0.5})$.

Exercice 3.

Soient $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x^2 \text{ et } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \,; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour chaque fonction, étudiez :

1) sa continuité en $(0,0)$;
2) si ses dérivées partielles et directionnelles existent en $(0,0)$;
3) sa différentiabilité en $(0,0)$.

Solution

Fonction f_1.

1) Observons que

$$\lim_{t\to 0} f_1(t,t^2) = 1 \neq 0 = f_1(0,0). \tag{3.3}$$

La fonction f_1 n'est donc pas continue en $(0,0)$.

2) Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$. Étudions les dérivées directionnelles de f_1 dans la direction $\boldsymbol{v} := \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f_1(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t\boldsymbol{v}) - f_1(\mathbf{0})}{t}. \tag{3.4}$$

Si $v_2 = 0$, alors

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f_1(\mathbf{0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = 0. \tag{3.5}$$

Considérons $v_2 \neq 0$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$: d'après la définition (3.1), $f_1(h\boldsymbol{v}) \neq 0$ si et seulement si $hv_2 = h^2v_1^2$ et $v_1 \neq 0$, i.e. $h = v_2v_1^{-2}$. Par conséquent, $\forall t \in \left]-|v_2v_1^{-2}|, +|v_2v_1^{-2}|\right[$, $f_1(t\boldsymbol{v}) = 0$. Ainsi, le dérivées directionnelles dans la direction $\boldsymbol{v}$ existent et sont égales à zéro :

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f_1(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t\boldsymbol{v}) - f_1(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0. \tag{3.6}$$

A fortiori, les dérivées partielles sont nulles :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_1}\, f_1(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \,; \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_2}\, f_1(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(0,t) - f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0. \tag{3.8}$$

3) Puisque f_1 n'est pas continue en $(0,0)$, a fortiori elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Fonction f_2.

1) La fonction f_2 est continue en $(0,0)$ puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$0 \leqslant \left| \frac{x^3}{x^2+y^4} \right| \leqslant |x|. \tag{3.9}$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(0,0)$.

2) On calcule la dérivée directionnelle dans une direction quelconque $\boldsymbol{v} := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f_2(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(t\boldsymbol{v}) - f_2(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^3}{t^3 v_1^2 + t^5 v_2^4} = v_1. \tag{3.10}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_1} f_2(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(t,0) - f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = 1 \ ; \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_2} f_2(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(0,t) - f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0. \tag{3.12}$$

3) Pour vérifier que f_2 est différentiable, utilisons la définition. Soit g une fonction définie pour tout $\boldsymbol{v} := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{0}) - \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \boldsymbol{v} = \frac{-v_1 v_2^4}{v_1^2 + v_2^4}. \tag{3.13}$$

On vérifie que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$0 \leqslant \frac{|x| y^4}{x^2 + y^4} = \frac{(|x| y^2) y^2}{x^2 + y^4} \leqslant \frac{\frac{x^2 + y^4}{2} y^2}{x^2 + y^4} = \frac{y^2}{2}. \tag{3.14}$$

Puisque $\boldsymbol{v} \mapsto v_2^2 \in o_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|)$, alors $g \in o_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|)$ et donc f_2 est différentiable.

Exercice 4.

1) Soit $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2y + x^2 \\ y - x^3 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\boldsymbol{p}_0 := (4,1)$ et $\boldsymbol{p}_1 := (1,1)$, montrer qu'il existe $\delta_0, \delta_1 > 0$ tels que

$$\forall \boldsymbol{p} \in B(\boldsymbol{p}_0, \delta_0) \ \exists \tilde{\boldsymbol{p}} \in B(\boldsymbol{p}_1, \delta_1) \quad \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{p}.$$

2) Soit $\boldsymbol{F} \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{F} = \mathbb{I}$. Montrer que l'image par $\boldsymbol{F}$ de tout sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.

Solution

1) Pour commencer, notez que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_1) = \boldsymbol{p}_0$. Calculons la matrice jacobienne de $\boldsymbol{F}$ au point $\boldsymbol{p}_1$. On a

$$D\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + 2x & 2 \\ -3x^2 & 1 + 2y \end{pmatrix}, \qquad D\boldsymbol{F}(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice $D\boldsymbol{F}(1,1)$ est bien inversible, son déterminant valant $15 \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un ouvert U contenant $\boldsymbol{p}_1$ tel que $\boldsymbol{F}$ soit une bijection entre U et $\boldsymbol{F}(U)$, qui est lui un ouvert contenant $\boldsymbol{p}_0$; de plus l'inverse de cette bijection est de classe C^1 (même C^∞ ici).

Soit $\delta_1 > 0$ tel que $B(\boldsymbol{p}_1, \delta_1) \subset U$ (possible car U est ouvert). Comme $\boldsymbol{G} := (\boldsymbol{F}|_U)^{-1} : \boldsymbol{F}(U) \to U$ est continue, $\boldsymbol{G}^{-1}(B(\boldsymbol{p}_1, \delta_1))$ est ouvert (voir la série 6) et cet ouvert contient $\boldsymbol{p}_0$. Il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que $B(\boldsymbol{p}_0, \delta_0) \subset \boldsymbol{G}^{-1}(B(\boldsymbol{p}_1, \delta_1))$, autrement dit, $B(\boldsymbol{p}_0, \delta_0) \subset \boldsymbol{F}(B(\boldsymbol{p}_1, \delta_1))$.

2) De la propriété $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ on tire que $\boldsymbol{F}$ est bijective et que son inverse est elle-même, donc $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{-1}$. On a donc

$$\boldsymbol{F}(U) = \{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in U\} = \{\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in U\} = \boldsymbol{F}^{-1}(U).$$

Or, on sait que $\boldsymbol{F}$ est continue si et seulement si la pré-image par $\boldsymbol{F}$ d'un ouvert est ouvert (série 6). Comme U est ouvert, alors $\boldsymbol{F}(U) = \boldsymbol{F}^{-1}(U)$ est ouvert.

Exercice 5.

Evaluer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)}\, dx \right) dy$ *ii)* $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \right) dy$

Solution

(i) Considérons l'intégrale double $\int_E e^{(x^2)} dx\, dy$ sur $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y \leqslant x \leqslant 1\}$. Le "domaine d'intégration" $E \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine simple, que l'on considère les variables dans l'ordre y et x (comme dans l'énoncé), ou dans l'ordre x et y :

$$\begin{aligned} E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y \leqslant x \leqslant 1\} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}. \end{aligned}$$

Il y a donc deux manières d'appliquer le théorème de Fubini. Néanmoins, en respectant l'ordre d'intégration donné, on doit trouver une primitive de la fonction $e^{(x^2)}$ par rapport à x, ce qui est impossible. Il faut donc inverser l'ordre d'intégration. Le domaine d'intégration E est représenté à la Fig. 1 ci-dessous.

Dans l'ordre donné, on parcourt E du bas en haut selon des lignes horizontales. Inverser l'ordre d'intégration revient à parcourir E de gauche à droite en selon des lignes verticales. Ainsi x varie entre 0 et 1 et y varie entre 0 et x. On a

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{(x^2)}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[y e^{(x^2)} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 x e^{(x^2)}\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{(x^2)} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}\,. \end{aligned}$$

(ii) On doit de nouveau inverser l'ordre d'intégration pour pouvoir calculer cette intégrale. Il faut donc parcourir le domaine d'intégration E (cf. Fig. 2) de gauche à droite selon des lignes verticales, c'est-à-dire laisser varier x entre 0 et 1 et y entre 0 et x^3.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[y\sqrt{1+x^4} \right]_{y=0}^{y=x^3} dx \\ &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\, 4x^3 (1+x^4)^{1/2}\, dx = \left[\frac{1}{6} (1+x^4)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}\big(2\sqrt{2} - 1\big) \end{aligned}$$

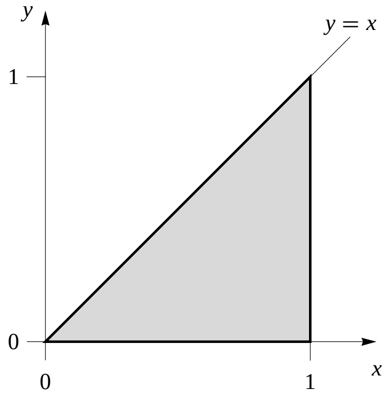

Figure 1

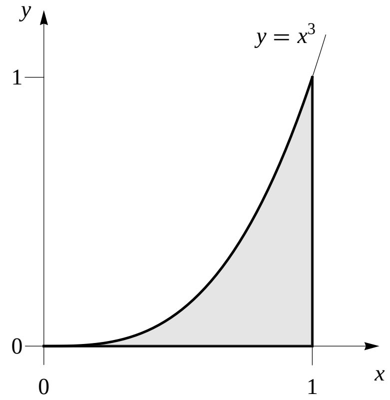

Figure 2