Série 28 du mercredi 28 mai 2025

Exercice 1.

1) Soient $K \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble compact et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(K, K)$ une suite de fonctions. Supposons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, T_n admet au moins un point fixe ; i.e. il existe $\boldsymbol{x}_n \in K$ tel que $T_n(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_n$. Enfin, supposons que $\lim_{n\to+\infty} T_n(\boldsymbol{x}) =: T(\boldsymbol{x})$ existe pour tout $\boldsymbol{x} \in K$, avec convergence uniforme :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\boldsymbol{x}\in K} \|T(\boldsymbol{x}) - T_n(\boldsymbol{x})\| = 0.$$

Montrer que la fonction $T : K \to K$ ainsi définie admet au moins un point fixe $\boldsymbol{x}_* \in K$.

2) Définissons K comme au point 1. Une application $T : K \to K$ est dite « bien approchée par des contractions » s'il existe une suite de contractions (de K dans lui-même) qui converge uniformément vers T. Définissons maintenant $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ et, pour tout $(\alpha, x, y) \in \,]0, 2\pi[\, \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$R_\alpha(x, y) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer que R_α n'est pas « bien approchée par des contractions ».

Exercice 2.

Définissons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. Trouver les points stationnaires ainsi que les maximum et minimum globaux de la fonction f restreinte à $\overline{B}((0, 0), 1)$.

Exercice 3.

Soient $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x^2 \text{ et } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour chaque fonction, étudiez :

1) sa continuité en $(0, 0)$;

2) si ses dérivées partielles et directionnelles existent en $(0,0)$;
3) sa différentiabilité en $(0,0)$.

Exercice 4.

1) Soit $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2y + x^2 \\ y - x^3 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\boldsymbol{p}_0 := (4,1)$ et $\boldsymbol{p}_1 := (1,1)$, montrer qu'il existe $\delta_0, \delta_1 > 0$ tels que

$$\forall \boldsymbol{p} \in B(\boldsymbol{p}_0, \delta_0) \ \exists \tilde{\boldsymbol{p}} \in B(\boldsymbol{p}_1, \delta_1) \quad \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{p}.$$

2) Soit $\boldsymbol{F} \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{F} = \mathbb{I}$. Montrer que l'image par $\boldsymbol{F}$ de tout sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.

Exercice 5.

Evaluer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

$i)$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)}\, dx \right) dy$ $\qquad$ $ii)$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \right) dy$