Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-05-26 au 2025-05-30

Série 27 du lundi 26 mai 2025

Exercice 1.

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues. On considère deux solutions y_1,y_2 de

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

1) Montrer que
$$W[y_1, y_2](t) = W[y_1, y_2](t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}.$$
Cette relation est connue sous le nom d'identité d'Abel.
2) Montrer que le Wronskien de deux solutions y_1, y_2 vérifie soit $W[y_1, y_2](t) > 0$, soit $W[y_1, y_2](t) < 0$, soit $W[y_1, y_2](t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Solution

1) Posons $\boldsymbol{y}_1(t) = (y_1(t), y_1'(t))$ et $\boldsymbol{y}_2(t) = (y_2(t), y_2'(t))$.
$$W[y_1, y_2](t) = \det\left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\right) = y_1y_2' - y_1'y_2,$$
où on n'exprime plus explicitement la dépendance des fonctions en t. On dérive le Wronskien pour obtenir
$$\begin{aligned} W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' &= y_1y_2'' - y_1''y_2 \\ &= y_1(-py_2' - qy_2) + (py_1' + qy_1)y_2 \\ &= p(y_1'y_2 - y_1y_2') \\ &= -pW. \end{aligned}$$
En résolvant cette équation différentielle, on obtient immédiatement
$$W[y_1, y_2](t) = W[y_1, y_2](t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}.$$
2) En utilisant l'identité d'Abel, il est clair que $\mathrm{sign}(W[y_1, y_2](t)) = \mathrm{sign}(W[y_1, y_2](t_0))$ pour tout $t \in I$, comme $e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)} > 0$ pour tout $t \in I$. Alternativement, on aurait aussi pu utiliser le théorème 9.47 du polycopié : pour deux solutions y_1, y_2 linéairement indépendantes, $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Comme le Wronskien est une fonction continue en t, $\mathrm{sign}(W[y_1, y_2](t)) = \mathrm{sign}(W[y_1, y_2](0))$. De plus, si deux solutions y_1, y_2 sont linéairement dépendantes, alors $W[y_1, y_2](t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

1) $y'(x) + y(x) = x^3$ avec $y(0) = -2$,
2) $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x}$.

Solution

1) La solution générale de l'ED homogène associée est $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière y_{part} de l'ED non-homogène, on utilise la méthode des coefficients indéterminés.
Ici $y' + y = e^{0\cdot x} P_3(x)$, où $P_3(x) = x^3$ (un polynôme de degré 3).
Comme $e^{0\cdot x} = 1$ n'est pas solution de l'équation homogène, on cherche y_{part} sous la forme $y_{\text{part}}(x) = e^{0\cdot x} T_3(x)$, où T_3 est un polynôme de degré 3 : $y_{\text{part}}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Dx + E$.
On obtient
$$y'_{\text{part}} + y_{\text{part}} = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + D)x + D + E = x^3,$$
ce qui mène à
$$A = 1, \quad 3A+B = 0, \quad 2B+D = 0 \quad \text{et} \quad D+E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1, \quad B = -3, \quad D = 6 \quad \text{et} \quad E = -6\,.$$
Ainsi $y_{\text{part}}(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$ et
$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Avec la condition $y(0) = -2$, on obtient $C = 4$, si bien que la solution (globale) est
$$y(x) = 4e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2) L'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ admet la racine $\lambda = 2$ de multiplicité 2. La solution générale de l'équation homogène associée est donc
$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
L'équation différentielle est de la forme $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} P_3(x)$, où $P_3(x) = x^3$ est un polynôme de degré 3. De plus e^{2x} et xe^{2x} sont solutions de l'équation homogène, mais pas $x^2 e^{2x}$. Cherchons une solution particulière de l'ED non-homogène sous la forme $y_{\text{part}}(x) = x^2 e^{2x} T_3(x)$, où T_3 est un polynôme de degré 3 à déterminer. Ici il est plus simple de travailler avec T_3 sans introduire une notation pour les coefficients de T_3. En substituant, on obtient
$$\begin{aligned} x^3 e^{2x} &= y''_{\text{part}} - 4y'_{\text{part}} + 4y_{\text{part}} \\ &= x^2 T_3(x)((e^{2x})'' - 4(e^{2x})' + 4e^{2x}) + (x^2 T_3(x))'(2(e^{2x})' - 4e^{2x}) + (x^2 T_3(x))'' e^{2x} \\ &= (x^2 T_3(x))'' e^{2x} \end{aligned}$$
et donc $(x^2 T_3(x))'' = x^3$. D'où $x^2 T_3(x) = \frac{1}{20} x^5 + Ax + B$ avec $A = B = 0$ (pour que T_3 soit bien un polynôme), et $y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{20} x^5 e^{2x}$. La solution générale est donc
$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{20} x^5 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.

Soient α, $\omega \in \mathbb{R}$. Trouver la solution générale de l'équation différentielle du 2^{nd} ordre suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = \cos(\omega t). \tag{3.1}$$

Solution

L'équation homogène correspondant à (3.1) est donnée par,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = 0, \tag{3.2}$$

donc l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 + 2r + \alpha = 0. \tag{3.3}$$

Il faut donc considérer trois cas :

— $\alpha < 1$;
— $\alpha > 1$;
— $\alpha = 1$.

Cas $\alpha < 1$. Les racines de (3.3) sont $-1 \pm \sqrt{1-\alpha}$. Deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (3.2) sont donc

$$t \mapsto \mathrm{e}^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \mathrm{e}^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}. \tag{3.4}$$

Cherchons maintenant une solution particulière de (3.1).
Puisque ni $t \mapsto \cos(\omega t)$ ni $t \mapsto \sin(\omega t)$ ne sont solutions de l'équation homogène (3.2), cherchons une solution particulière dans l'espace qu'elles engendrent. Cherchons $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $t \mapsto \gamma_1 \cos(\omega t) + \gamma_2 \sin(\omega t)$ soit solution de (3.1). Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\cos(\omega t) &= -\omega^2 \gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \omega^2 \sin(\omega t) - 2\gamma_1 \omega \sin(\omega t) \\
&\qquad + 2\gamma_2 \omega \cos(\omega t) + \alpha \gamma_1 \cos(\omega t) + \alpha \gamma_2 \sin(\omega t) \qquad (3.5) \\
&= \cos(\omega t)(-\omega^2 \gamma_1 + 2\gamma_2 \omega + \alpha \gamma_1) + \sin(\omega t)(-\omega^2 \gamma_2 - 2\gamma_1 \omega + \alpha \gamma_2). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} -\gamma_2 \omega^2 - 2\gamma_1 \omega + \alpha \gamma_2 = 0, \\ -\omega^2 \gamma_1 + 2\gamma_2 \omega + \alpha \gamma_1 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} 2\omega \gamma_1 = (\alpha - \omega^2)\gamma_2, \\ 2\omega \gamma_2 = 1 - (\alpha - \omega^2)\gamma_1. \end{cases} \tag{3.7}$$

d'où

$$4\omega^2 \gamma_1 = (\alpha - \omega^2) 2\omega \gamma_2 = (\alpha - \omega^2)(1 - (\alpha - \omega^2)\gamma_1) = (\alpha - \omega^2) - (\alpha - \omega^2)^2 \gamma_1. \tag{3.8}$$

En supposant $(\alpha, \omega) \neq (0, 0)$:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\alpha - \omega^2}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2}, \\ \gamma_2 = \dfrac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Finalement, une solution particulière de (3.1) est

$$t \mapsto \frac{(\alpha-\omega^2)\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{4\omega^2+(\alpha-\omega^2)^2}. \tag{3.10}$$

L'ensemble des solutions de (3.1) si $(\alpha,\omega)\neq(0,0)$ et $\alpha<1$ est donc

$$\left\{t \mapsto c_1\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t}+c_2\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}+\frac{(\alpha-\omega^2)\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{4\omega^2+(\alpha-\omega^2)^2} : c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}. \tag{3.11}$$

Considérons maintenant le cas $(\alpha,\omega)=(0,0)$. L'équation (3.1) devient

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y''(t)+2y'(t)=1. \tag{3.12}$$

Il est équivalent de résoudre

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad z'(t)+2z(t)=1. \tag{3.13}$$

Une fonction $y\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ est solution de (3.12) si et seulement si y' est solution de (3.13). Si $z\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ est solution de (3.13), la méthode du facteur intégrant donne

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2t}z(t))}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{2t}. \tag{3.14}$$

Ainsi les solutions de (3.13) sont

$$\left\{t\mapsto\frac{1}{2}+c\mathrm{e}^{-2t} : c\in\mathbb{R}\right\}; \tag{3.15}$$

donc les solutions de (3.12) sont

$$\left\{t\mapsto c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2+\frac{t}{2} : c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}. \tag{3.16}$$

Cas $\alpha>1$. Cette fois-ci deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (3.2) sont

$$t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\cos\!\left(t\sqrt{\alpha-1}\right)\qquad\text{et}\qquad t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\sin\!\left(t\sqrt{\alpha-1}\right). \tag{3.17}$$

La solution particulière (3.10) est également valide pour le cas présent. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (3.1) si $\alpha>1$ est

$$\left\{t\mapsto c_1\mathrm{e}^{-t}\cos\!\left(t\sqrt{\alpha-1}\right)+c_2\mathrm{e}^{-t}\sin\!\left(t\sqrt{\alpha-1}\right)+\frac{(\alpha-\omega^2)\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{4\omega^2+(\alpha-\omega^2)^2} : c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}. \tag{3.18}$$

Cas $\alpha=1$. Cette fois-ci deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (3.2) sont

$$t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\qquad\text{et}\qquad t\mapsto t\mathrm{e}^{-t}. \tag{3.19}$$

La fonction (3.10) est toujours une solution particulière de (3.1) dans le cas présent. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (3.1) si $\alpha>1$ est

$$\left\{t\mapsto c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2t\mathrm{e}^{-t}+\frac{(\alpha-\omega^2)\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{4\omega^2+(\alpha-\omega^2)^2} : c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}. \tag{3.20}$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1) Vérifier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$.
2) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}.$$

Solution

1) Commençons par appliquer le critère de D'Alembert sur les séries numériques. Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \times \frac{(3n)!}{|x|^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0.$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série est infini. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ définit donc une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3nx^{3n-1}}{(3n)!} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n(3n-1)x^{3n-2}}{(3n)!}.$$

Les séries dérivées héritent du rayon de convergence infini. On obtient ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}.$$

Il s'ensuit donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, chacune des trois séries entières converge absolument et on a :

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

2) On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Ainsi f est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) + u(t) = e^t \\ \hfill u(0) = 1 \\ \hfill u'(0) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Calculons la solution générale de l'équation sans second membre $u''(t) + u'(t) + u(t) = 0$ d'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Puisque le discriminant de cette équation vaut -3, on obtient :

$$u(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

On vérifie immédiatement que $\frac{1}{3}e^t$ est une solution particulière de (4.1), ce qui implique que la solution générale du problème non-homogène est donnée par

$$u(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}e^t.$$

En imposant $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$, on obtient $c_1 = \frac{2}{3}$ et $c_2 = 0$. Ainsi, la solution de (4.1) qui vérifie ces conditions initiales est

$$u(t) = \frac{2}{3}e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}e^t.$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = f(1) = u(1) = \frac{2}{3}e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}e$$