Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-05-26 au 2025-05-30

Série 27 du lundi 26 mai 2025

Exercice 1.

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues. On considère deux solutions y_1,y_2 de

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

1) Montrer que
$$W[y_1, y_2](t) = W[y_1, y_2](t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}.$$
Cette relation est connue sous le nom d'identité d'Abel.
2) Montrer que le Wronskien de deux solutions y_1, y_2 vérifie soit $W[y_1, y_2](t) > 0$, soit $W[y_1, y_2](t) < 0$, soit $W[y_1, y_2](t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :
1) $y'(x) + y(x) = x^3$ avec $y(0) = -2$,
2) $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x}$.

Exercice 3.

Soient α, $\omega \in \mathbb{R}$. Trouver la solution générale de l'équation différentielle du 2^{nd} ordre suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = \cos(\omega t). \tag{3.1}$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1) Vérifier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$.
2) En déduire la somme de la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}.$$