Série 26 du mercredi 21 mai 2025

Exercice 1.

On considère le problème de Cauchy

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in I, \qquad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = v_0, \tag{1.1}$$

où I est un intervalle ouvert contenant t_0, et $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et globalement lipschitzienne par rapport au deuxième argument : il existe $\ell \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall t \in I \ \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leqslant \ell(t) \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|.$$

Montrer que (1.1) admet une solution globale unique $u \in \mathrm{C}^2(I)$. En déduire l'existence et l'unicité de la solution globale du problème de Cauchy

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = c(t), \quad t \in I, \qquad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = v_0, \qquad a, b, c \in \mathrm{C}^0(I).$$

Solution

On transforme l'équation du second ordre en un système d'équations du premier ordre pour u et v. Soit

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = f(t, u(t), v(t)), \end{cases} \qquad t \in I, \qquad u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0.$$

Alors $u \in \mathrm{C}^2(I)$ est solution globale du problème de Cauchy pour l'EDO du deuxième ordre ssi $(u, v) := (u, u') \in \mathrm{C}^1(I)$ est solution globale du problème de Cauchy pour l'EDO vectoriel du premier ordre. On peut récrire le système du premier ordre comme

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = F\left(t, \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}\right), \quad t \in I, \qquad \begin{pmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

avec $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$F\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ f(t, x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t, x, y) \\ F_2(t, x, y) \end{pmatrix}.$$

Or F est continue sur $I \times \mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions continues et F est globalement lipschitzienne par rapport au deuxième argument. En effet la définition de "globalement lipschitzienne par rapport au second argument" appliquée à f signifie qu'il existe $\ell \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall t \in I \ \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leqslant \ell(t) \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|.$$

D'où,

$$\forall t \in I\, \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \;\; \|F(t, u_1, v_1) - F(t, u_2, v_2)\| \leqslant \left(|v_1 - v_2|^2 + |f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(|v_1 - v_2|^2 + \ell(t)^2(|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2)\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{1 + \ell^2(t)}\, \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|.$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, version globale, le problème de Cauchy pour le système du premier ordre admet une unique solution globale. Il en est donc de même pour le problème scalaire du second ordre.

Pour le cas particulier, on a $f(t, u, v) = c(t) - a(t)v - b(t)u$ et, en choisissant $\ell(t) = (|a(t)|^2 + |b(t)|^2)^{1/2}$,

$$\forall t \in I\ \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \;\; |f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)|$$
$$\leqslant |a(t)|\, |v_1 - v_2| + |b(t)|\, |u_1 - u_2| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \ell(t)\|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|,$$

ce qui permet d'appliquer le cas général.

Exercice 2.

Trouvez toutes les fonctions $w :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad tw''(t) - w'(t) + (1 - t)w(t) = 0. \tag{2.1}$$

Détaillez votre raisonnement.

Indication. La fonction exponentielle est une solution de (2.1).

Solution

(2.1) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, scalaire ; ses solutions dans $\mathrm{C}^2(]0, +\infty[)$ sont donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 (il n'y a pas de condition de Cauchy). Puisque nous connaissons une première solution (la fonction exponentielle), cherchons une seconde solution linéairement indépendante. Ces deux solutions engendreront l'espace des solutions de (2.1).

Cherchons cette second solution sous la forme $t \mapsto v(t)e^t$. Pour $v \in \mathrm{C}^2(]0, +\infty[)$, $t \mapsto v(t)e^t$ est solution de (2.1) si et seulement si

$$tv(t) + 2tv'(t) + tv''(t) - v(t) - v'(t) + v(t) - tv(t) = 0, \tag{2.2}$$

c'est-à-dire

$$2tv'(t) + tv''(t) - v'(t) = 0. \tag{2.3}$$

Il est équivalent de chercher $u \in \mathrm{C}^1(]0, +\infty[)$ telle que

$$2tu(t) + tu'(t) - u(t) = 0 \;\; : \tag{2.4}$$

si u est solution de (2.4), toutes ses primitives sont solutions de (2.3). La fonction nulle est solution de (2.4) ; elle correspond à une solution constante de (2.3) et donc à une solution de (2.1) proportionnelle à l'exponentielle. Puisque nous cherchons une seconde solution de (2.1) linéairement indépendante de l'exponentielle, cherchons une solution u de (2.4) qui ne soit pas nulle partout : par continuité de u, il existe au moins un intervalle ouvert I non vide sur lequel u est non nulle. Pour tout $t \in I$,

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{1}{t} - 2 \tag{2.5}$$

donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln|u(t)| = \ln t - 2t + c\ ; \tag{2.6}$$

finalement,

$$u \in \left\{t \mapsto a t \mathrm{e}^{-2t} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \subset \mathrm{C}^1(I). \tag{2.7}$$

Au vu des solutions trouvées, nous pouvons choisir $I =]0, +\infty[$ dans ce raisonnement.

Puisque $t \mapsto t\mathrm{e}^{-2t}$ est solution de (2.4), sa primitive $t \mapsto -(1+2t)\mathrm{e}^{-2t}/4$ est une solution de (2.3) ; cette primitive est facilement obtenue en intégrant par parties. Par conséquent $t \mapsto -(1+2t)\mathrm{e}^{-t}/4$ est une solution de (2.1). Cette dernière fonction est bien linéairement indépendante de l'exponentielle, comme attendu. Ces deux solutions engendrent donc l'ensemble des solutions de (2.1) :

$$\{t \mapsto a\mathrm{e}^{t} + b(1+2t)\mathrm{e}^{-t} : a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{C}^2(]0, +\infty[). \tag{2.8}$$

Exercice 3.

Soit une fonction continue $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ et une solution globale y de l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

telle que $y > 0$ sur $]0, +\infty[$. A l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que $y' \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$. Prouver ensuite que la fonction q vérifie

$$\int_1^{+\infty} q(t)dt < +\infty.$$

Pour ceci, la fonction auxiliaire $z = -y'/y$ et l'EDO qu'elle satisfait sont utiles.

Solution

On a

$$y''(x) = -q(x)y(x) \leqslant 0,\ \forall x > 0$$

et donc la fonction y' est décroissante sur $]0, \infty[$. Soit alors $b > 0$. On a par le théorème des accroissements finis, si $x > b$:

$$y(x) = y(b) + y'(b_x)(x-b) \leqslant y(b) + y'(b)(x-b)$$

où $b_x \in]b, x[$. Si $y'(b) < 0$, on obtiendrait une contradiction avec $y(x) > 0$ pour tout $x > 0$. En effet, dans ce cas on aurait $y(b) + y'(b)(x-b) < 0$ si x est assez éloigné de b. Ainsi $y'(b) \geqslant 0$ et donc finalement $y' \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$.

Considérons la fonction auxiliaire $z(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)} \leqslant 0$ définie sur $]0, \infty[$. Remarquant que

$$z'(x) = -\frac{y''(x)y(x) - y'(x)^2}{y(x)^2} = q(x) + z^2(x) \geqslant 0, \quad x > 0,$$

on a pour tout $b > 1$ que

$$z(b) = z(1) + \int_1^b z'(t)dt \geqslant z(1) + \int_1^b q(t)dt.$$

D'où, pour tout $b > 1$, $\int_1^b q(t)dt \leqslant z(b) - z(1) \leqslant -z(1) < +\infty$ et $\int_1^{+\infty} q(t)dt < +\infty$.

Exercice 4.

Soit I un intervalle ouvert contenant 0, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que l'équation différentielle

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

n'admet jamais simultanément $y_1(t) = t$ et $y_2(t) = t^2$ comme solutions.

Solution

Les fonctions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont linéairement indépendantes, cependant le Wronskien

$$W[y_1, y_2](t) = \det\left(\begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}\right)$$

s'annule au point $t = 0$, ce qui est une contradiction avec le Théorème 9.47 du polycopié.