Série 26 du mercredi 21 mai 2025

Exercice 1.

On considère le problème de Cauchy

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in I, \qquad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = v_0, \tag{1.1}$$

où I est un intervalle ouvert contenant t_0, et $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et globalement lipschitzienne par rapport au deuxième argument : il existe $\ell \in \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall t \in I \ \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leqslant \ell(t) \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|.$$

Montrer que (1.1) admet une solution globale unique $u \in \mathrm{C}^2(I)$. En déduire l'existence et l'unicité de la solution globale du problème de Cauchy

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = c(t), \quad t \in I, \qquad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = v_0, \qquad a, b, c \in \mathrm{C}^0(I).$$

Exercice 2.

Trouvez toutes les fonctions $w :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad tw''(t) - w'(t) + (1 - t)w(t) = 0. \tag{2.1}$$

Détaillez votre raisonnement.

Indication. La fonction exponentielle est une solution de (2.1).

Exercice 3.

Soit une fonction continue $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ et une solution globale y de l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

telle que $y > 0$ sur $]0, +\infty[$. A l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que $y' \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$. Prouver ensuite que la fonction q vérifie

$$\int_1^{+\infty} q(t)dt < +\infty.$$

Pour ceci, la fonction auxiliaire $z = -y'/y$ et l'EDO qu'elle satisfait sont utiles.

Exercice 4.

Soit I un intervalle ouvert contenant 0, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que l'équation différentielle

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

n'admet jamais simultanément $y_1(t) = t$ et $y_2(t) = t^2$ comme solutions.