Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-05-19 au 2025-05-23

Série 25 du lundi 19 mai 2025

Exercice 1.

Soit un intervalle ouvert I, $t_0 \in I$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour chaque $t \in I$ fixé, on suppose que la dérivée de $f(t, \cdot)$ par rapport à x existe en tout point de $\mathbb{R}$ et est non positive :

$$\forall t \in I \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \leqslant 0,$$

et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times \mathbb{R}$. Démontrer que le problème à valeur initiale : trouver $u \in C^1(I \cap [t_0, \infty[)$ tel que

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I \cap [t_0, \infty[, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$, a une solution globale unique.

Solution

Soit $t \in I$, $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(t, \cdot)$ sur l'intervalle $[x, y]$, on obtient l'existence de $z \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(t, x) - f(t, y)}{x - y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, z) \leqslant 0.$$

D'où

$$(f(t, x) - f(t, y))(x - y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, z)(x - y)^2 \leqslant 0$$

et donc

$$(f(t, y) - f(t, x))(y - x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, z)(y - x)^2 \leqslant 0.$$

Ainsi

$$\forall t \in I \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ \ (f(t, x) - f(t, y))(x - y) \leqslant \ell(t) \|x - y\|^2$$

avec $\ell = 0$ sur I (fonction continue). De plus f est localement lipschitzienne par rapport au second argument à cause de l'hypotèse d'existence et continuité sur $I \times \mathbb{R}$ de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Par le Théorème 9.43 du cours, on peut conclure que le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I \cap [t_0, \infty[, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

a une solution globale unique.

Exercice 2.

Soient $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \quad xf(t,x) \leqslant e^{\sin t}(1+x^2)$$

et $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ solution de

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |u(t)| \leqslant \sqrt{2}e^{et}$.

Solution

On a alors :

$$u(t) \cdot u'(t) \leqslant e^{\sin t}(1 + u(t)^2)$$

on encore

$$(\ln(1+u(t)^2))' = \frac{(u^2(t))'}{1+u(t)^2} = \frac{2u(t)\cdot u'(t)}{1+u(t)^2} \leqslant 2e^{\sin t} \leqslant 2e.$$

En intégrant de 0 à t, on obtient, avec la condition initiale :

$$\ln(1+u(t)^2) - \ln 2 \leqslant 2et.$$

Puisque l'exponentielle est croissante

$$u(t)^2 < 1 + u(t)^2 \leqslant 2e^{2et}$$

et finalement

$$|u(t)| \leqslant \sqrt{2}e^{et}.$$

Exercice 3.

1) Soient $I, E \subset \mathbb{R}$ des intervalles ouverts, $f \in C^0(I \times E, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne et $(t_0, u_0) \in I \times E$. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)),\ t \in I, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition 1 (Barrière inférieure)**.** Soient $\tilde{J} \subset I$ un intervalle ouvert contenant t_0 et $\varphi \in C^1(\tilde{J}, E)$. Le couple $(\tilde{J}, \varphi)$ est appelé « barrière inférieure » de (3.1) si $\varphi(t_0) = u_0$ et, $\forall t \in \tilde{J}$, $\varphi'(t) \leqslant f(t, \varphi(t))$. Cette barrière inférieure est dite « forte » si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Soient $(\tilde{J}, \varphi)$ une barrière inférieure de (3.1) et (J, u) une solution maximale de (3.1). Montrer que, $\forall t \in J \cap \tilde{J} \cap [t_0, +\infty[$, $\varphi(t) \leqslant u(t)$. Montrer également que cette dernière inégalité est stricte si la barrière inférieure est forte.

Indication. Essayez d'argumenter par l'absurde.

Indication. Il peut être utile d'utiliser le *lemme de Grönwall* : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient u, $\beta \in \mathrm{C}^0([a, b[)$. Si u est différentiable sur $]a, b[$ et $\forall t \in\,]a, b[\quad u'(t) \leqslant \beta(t)u(t)$, alors $\forall t \in [a, b[\quad u(t) \leqslant u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$.

2) Soit $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = t + u(t)^2, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

a) Montrer que, pour tout $\gamma \in \left]0, \sqrt{t_0}\right[$, la solution u de (3.2) satisfait

$$\gamma \tan\left(\gamma(t - t_0) + \arctan\left(\frac{u_0}{\gamma}\right)\right) < u(t), \quad \forall t \in\,]t_0, t_0 + \tau(\gamma)[,$$

en notant pour un quelconque $x \in \mathbb{R}_*$: $\tau(x) \coloneqq x^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u_0/x)\right)$.

Indication. $\forall (t, y) \in\,]\gamma^2, +\infty[\times \mathbb{R}$, $\gamma^2 + y^2 < f(t, y)$.

b) En déduire que

$$\lim_{t \to t_0 + \tau(\sqrt{t_0})} u(t) = +\infty.$$

Solution

1) a) Supposons que la barrière soit faible, donc $\varphi(t_0) = u(t_0)$ et $\varphi'(t) \leqslant f(t, \varphi(t))$ pour $t \in [t_0, +\infty[\cap J \cap \tilde{J}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_2 \in\,]t_0, +\infty[\cap J \cap \tilde{J}$ tel que $\varphi(t_2) > u(t_2)$ et posons $t_1 = \sup\{t \in [t_0, t_2[\ : \ \varphi(t) \leqslant u(t)\}$. Alors en t_1 on a $\varphi(t_1) = u(t_1)$ et de plus $\varphi(t) > u(t)$ pour tout $t \in\,]t_1, t_2]$. Comme f est localement Lipschitzienne il existe un voisinage U de $u(t_1)$ et $C > 0$ telle que pour $v, w \in U$ on a

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leqslant C|v - w|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[t_1, t_1 + \varepsilon[\subset [t_1, t_2[$ et $\varphi(t), u(t) \in U$ si $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon[$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - u'(t) \leqslant f(t, \varphi(t)) - f(t, u(t)) &\leqslant |f(t, \varphi(t)) - f(t, u(t))| \\ &\leqslant C|\varphi(t) - u(t)| \\ &\leqslant C\varphi(t) - u(t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in\,]t_1, t_1 + \varepsilon[$, puisque pour tout dans $t \in\,]t_1, t_1 + \varepsilon[$ on a $\varphi(t) > u(t)$. En appliquant le lemme de Grönwall à $h(t) = \varphi(t) - u(t)$ on obtient

$$0 < h(t) \leqslant h(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^t C ds\right) = 0 \qquad \forall t \in\,]t_1, t_1 + \varepsilon[,$$

où nous avons utilisé $h(t_1) = 0$. C'est une contradiction.

b) Supposons que la barrière soit stricte, donc $\varphi(t_0) = u(t_0)$ et $\varphi'(t_0) < f(t_0, u_0) = u'(t_0)$ alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varphi(t) < u(t)$ pour $t \in]t_0, t_0 + \varepsilon_0[$. Soit $\mathrm{E} = \{t \in]t_0, +\infty[\cap J \cap \tilde{J} \,:\, \varphi(t) \geqslant u(t)\}$ et supposons par l'absurde que $\mathrm{E} \neq \varnothing$, soit donc $t_1 = \inf E$. Alors $t_1 > t_0$ (car $\varphi(t) < u(t)$ dans un voisinage de t_0) et pour tout $t \in]t_0, t_1[$ on a $\varphi(t) < u(t)$. Par continuité de φ, u il s'ensuit que $\varphi(t_1) = u(t_1)$.

Par conséquent, la fonction $h(t) = \varphi(t) - u(t)$ vérifie $h(t_1) = 0$ et $h(t) < 0$ pour $t \in]t_0, t_1[$. Cela implique que $h'(t_1) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\varphi'(t_1) \geqslant u'(t_1)$. Mais nous avons également $\varphi'(t_1) < f(t_1, \varphi(t_1)) = f(t_1, u(t_1)) = u'(t_1)$, ce qui conduit à une contradiction.

2) a) Soit $\gamma \in]0, \sqrt{t_0}[$, alors $\gamma^2 + u(t)^2 \leqslant t_0 + u(t)^2 \leqslant f(t, u(t))$. Soit $(J_\gamma, \varphi_\gamma)$ la solution maximale de

$$\varphi_\gamma'(t) = \gamma^2 + \varphi_\gamma(t)^2, \quad t \in]t_0, +\infty[, \qquad \varphi_\gamma(t_0) = u_0.$$

Ainsi φ_γ est une barrière inférieure stricte et donc $\varphi_\gamma(t) < u(t)$ pour $t \in J_\gamma \setminus \{t_0\}$. On calcule φ_γ par séparation de variables et on trouve

$$\varphi_\gamma(t) = \gamma \tan(\gamma(t - t_0) + \arctan(u_0/\gamma)),$$

son domaine de définition est $J_\gamma = [t_0, t_0 + \tau(\gamma)[$.

b) On a $J_0 = [t_0, t_0 + \tau(\sqrt{t_0})[\subset J_\gamma$, donc

$$\varphi_\gamma(t) < u(t), \quad t \in J_0 \setminus \{t_0\}$$

et par continuité

$$\varphi_0(t) = \lim_{\gamma \to \sqrt{t_0}} \varphi_\gamma(t) \leqslant u(t), \quad t \in J_0 \setminus \{t_0\}.$$

Comme $\lim_{t \to t_0 + \tau(\sqrt{t_0})} \varphi_0(t) = +\infty$; le résultat s'ensuit.

Exercice 4.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Considérons le problème à la valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = t\dfrac{u(t)^3}{u(t) - 1}, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Discuter l'existence et l'unicité de solutions locales, maximales et globales — sans les calculer explicitement — pour $t \geqslant 0$, selon les trois cas suivants :

1) $u_0 < 0$;
2) $u_0 \in]0, 1[$;
3) $u_0 > 1$.

Aidez vous avec un dessin.

Solution

La fonction $f(t, u) = tu^3/(u - 1)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et est continue avec dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial u}$ continue sur son domaine de définition. Elle est donc localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable et, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a existence et unicité de solutions maximales pour tout $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On remarque de plus que lorsque $u_0 = 0$, on a l'unique solution globale constante $u(t) = 0$.

Étudions séparément les trois cas $u_0 > 0$, $u_0 \in]0,1[$ et $u_0 > 0$.

1) *Cas* $u_0 > 1$. Soit (J_{max}, u) la solution (unique) maximale. Dans ce cas, on a $u(t) \geqslant u_0$ pour tout $t \in J_{max} \cap \mathbb{R}_+$ (donc en particulier $u(t) > 1$). Si ceci n'était pas le cas, il existerait $t_1 \geqslant 0$ tel que $1 < u(t_1) < u_0$, et donc pour un certain $0 < t_0 < t_1$ on aurait $u'(t_0) < 0$. Or ceci contredit le fait que $u'(t_0) = t_0 \frac{u(t_0)^3}{u(t_0)-1} > 0$.

   On montre de même que $u(t)$ est strictement croissante par un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe $t_1 > t_0 \geqslant 0$ tel que $1 < u(t_1) < u(t_0)$. Alors il existe $t_0 < s < t_1$ tel que $u'(s) < 0$, ce qui contredit à nouveau $u'(s) = s\frac{u(s)^3}{u(s)-1} > 0$.

   On montre maintenant que $u(t)$ diverge en temps fini en utilisant le principe de comparaison, ce qui empêche l'existence d'une solution globale. Pour $u > 1$, on a $\frac{u^3}{u-1} \geqslant u^2$, donc on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = t\, v(t)^2, \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

   En le résolvant explicitement par séparation de variables, on obtient la solution

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - \frac{1}{2}t^2},$$

   et on observe que $v(t) \to +\infty$ lorsque $t \to \sqrt{\frac{2}{u_0}}$. Par le principe de comparaison (un résultat d'un exercice précédent), on a $u(t) \geqslant v(t)$, ce qui implique que $u(t)$ doit aussi diverger en un temps fini $T \leqslant \sqrt{\frac{2}{u_0}}$.

2) *Cas* $0 < u_0 < 1$. Soit (J_{max}, u) la solution maximale. Pour tout $t \in J_{max} \cap \mathbb{R}_+$, si $0 < u(t) < 1$, on a $u'(t) = t\frac{u(t)^3}{u(t)-1} \leqslant 0$, donc par un raisonnement similaire au point précédent, $u(t)$ est décroissante et, en particulier, elle ne peut pas approcher la valeur 1.

   On montre à présent que la solution maximale $u(t)$ est définie pour tout $t > 0$ (elle est donc une solution globale), et qu'elle tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. La solution maximale doit être définie globalement car elle ne peut pas franchir la droite $u = 0$ (si c'était le cas, il y aurait un premier instant t_0 tel que $u(t_0) = 0$, ce qui violerait l'unicité de la solution locale autour de t_0, puisque $u = 0$ est aussi une solution). Comme $u(t)$ est positive et décroissante, elle converge vers une limite $\ell \in [0,1[$ quand $t \to +\infty$. Si $\ell > 0$, on aurait

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = \lim_{t\to+\infty} t\frac{u(t)^3}{u(t)-1} = -\infty,$$

   ce qui contredit le fait que u possède une asymptote horizontale. Ainsi, on a prouvé par l'absurde que $\ell = 0$.

3) *Cas* $u_0 < 0$. Soit (J_{max}, u) la solution maximale. Pour tout $t \in J_{max} \cap \mathbb{R}_+$, si $u(t) < 0$, on a $u'(t) = t\frac{u(t)^3}{u(t)-1} \geqslant 0$, et de nouveau on montre par un raisonnement similaire au point

précédent que $u(t)$ est croissante. Comme $u(t)$ ne peut pas franchir la droite $u = 0$ en vertu de l'unicité locale, on en conclut que la solution maximale est définie pour tout $t \geqslant 0$ et donc est une solution globale. Étant croissante, $u(t)$ admet une limite $\ell \leqslant 0$ pour $t \to +\infty$. Si $\ell < 0$, on aurait

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = \lim_{t\to+\infty} t\frac{u(t)^3}{u(t)-1} = +\infty,$$

ce qui contredit le fait que $u(t)$ a une limite finie ℓ. On a donc montré par l'absurde que $\ell = 0$.