Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-05-19 au 2025-05-23

Série 25 du lundi 19 mai 2025

Exercice 1.

Soit un intervalle ouvert I, $t_0 \in I$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour chaque $t \in I$ fixé, on suppose que la dérivée de $f(t, \cdot)$ par rapport à x existe en tout point de $\mathbb{R}$ et est non positive :

$$\forall t \in I \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \leqslant 0,$$

et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times \mathbb{R}$. Démontrer que le problème à valeur initiale : trouver $u \in C^1(I \cap [t_0, \infty[)$ tel que

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I \cap [t_0, \infty[, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$, a une solution globale unique.

Exercice 2.

Soient $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad x f(t, x) \leqslant e^{\sin t}(1 + x^2)$$

et $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ solution de

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |u(t)| \leqslant \sqrt{2} e^{et}$.

Exercice 3.

1) Soient $I, E \subset \mathbb{R}$ des intervalles ouverts, $f \in C^0(I \times E, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne et $(t_0, u_0) \in I \times E$. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \ t \in I, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition 1 (Barrière inférieure)**.** Soient $\tilde{J} \subset I$ un intervalle ouvert contenant t_0 et $\varphi \in C^1(\tilde{J}, E)$. Le couple $(\tilde{J}, \varphi)$ est appelé « barrière inférieure » de (3.1) si $\varphi(t_0) = u_0$ et, $\forall t \in \tilde{J}$, $\varphi'(t) \leqslant f(t, \varphi(t))$. Cette barrière inférieure est dite « forte » si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Soient $(\tilde{J}, \varphi)$ une barrière inférieure de (3.1) et (J, u) une solution maximale de (3.1). Montrer que, $\forall t \in J \cap \tilde{J} \cap [t_0, +\infty[$, $\varphi(t) \leqslant u(t)$. Montrer également que cette dernière inégalité est stricte si la barrière inférieure est forte.

Indication. Essayez d'argumenter par l'absurde.

Indication. Il peut être utile d'utiliser le *lemme de Grönwall* : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient u, $\beta \in \mathrm{C}^0([a, b[)$. Si u est différentiable sur $]a, b[$ et $\forall t \in]a, b[\quad u'(t) \leqslant \beta(t)u(t)$, alors $\forall t \in [a, b[\quad u(t) \leqslant u(a) \exp\Big(\int_a^t \beta(s) ds\Big)$.

2) Soit $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = t + u(t)^2, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

a) Montrer que, pour tout $\gamma \in \big]0, \sqrt{t_0}\big[$, la solution u de (3.2) satisfait

$$\gamma \tan\Big(\gamma(t - t_0) + \arctan\Big(\frac{u_0}{\gamma}\Big)\Big) < u(t), \quad \forall t \in]t_0, t_0 + \tau(\gamma)[,$$

en notant pour un quelconque $x \in \mathbb{R}_*$: $\tau(x) := x^{-1}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan({}^{u_0}/_{x})\Big)$.

Indication. $\forall (t, y) \in]\gamma^2, +\infty[\times \mathbb{R}$, $\gamma^2 + y^2 < f(t, y)$.

b) En déduire que

$$\lim_{t \to t_0 + \tau(\sqrt{t_0})} u(t) = +\infty.$$

Exercice 4.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Considérons le problème à la valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = t \dfrac{u(t)^3}{u(t) - 1}, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Discuter l'existence et l'unicité de solutions locales, maximales et globales — sans les calculer explicitement — pour $t \geqslant 0$, selon les trois cas suivants :

1) $u_0 < 0$;
2) $u_0 \in]0, 1[$;
3) $u_0 > 1$.

Aidez vous avec un dessin.