Série 20 du mercredi 14 mai 2025

Exercice 1.

Considérons la fonction u solution de l'équation

$$\begin{cases} u' = u, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Calculer explicitement la suite d'itérées définie par

$$u_0 = 1 \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall (j,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \;\; u_j(t) := 1 + \int_0^t u_{j-1}.$$

Solution

Posons $f(t,u) = u$ pour $t, u \in \mathbb{R}$ et observons les premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1(t) &= 1 + \int_0^t f(s, u_0(s))\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t u_0 = 1 + t, \\ u_2(t) &= 1 + \int_0^t f(s, u_1(s))\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t u_1 = 1 + t + \frac{t^2}{2!}, \\ u_3(t) &= 1 + \int_0^t f(s, u_2(s))\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t u_2 = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u_i(t) = \sum_{k=0}^{i} \frac{t^k}{k!}. \tag{1.1}$$

Soit $j \in \mathbb{N}$; supposons que (1.1) soit vrai pour j.

$$u_{j+1}(t) = 1 + \int_0^t u_j = 1 + \int_0^t \sum_{k=0}^{j} \frac{s^k}{k!}\,\mathrm{d}s = 1 + \sum_{k=0}^{j} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{j+1} \frac{t^k}{k!},$$

ce qui prouve (1.1) pour $j+1$ et conclut la preuve.

Remarque. On reconnaît l'expansion de Taylor de la fonction exponentielle.

Exercice 2.

Soient $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$. Discuter l'existence et – le cas échéant – l'unicité d'une solution globale des problèmes de Cauchy suivants.

1)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \frac{t^2 u(t)^3}{1+u(t)^2}, \tag{2.1a}$$
$$u(t_0) = u_0. \tag{2.1b}$$

2)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \arctan(tu(t)), \tag{2.2a}$$
$$u(t_0) = u_0. \tag{2.2b}$$

Solution

Chacun des deux problèmes admet une unique solution globale. Nous pouvons le prouver avec le théorème de Cauchy–Lipschitz (version globale). Vérifions pour chaque problème l'hypothèse de continuité lipschitzienne globale par rapport au second argument.

1) Notons f la fonction associée au membre de droite de (2.1a) :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(t,x) := \frac{t^2 x^3}{1+x^2}. \tag{2.3}$$

Soit $(t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; on obtient avec l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| = t^2 \left| \frac{x^3}{1+x^2} - \frac{y^3}{1+y^2} \right| &= t^2 \frac{\left|x^3 - y^3 + x^2y^2(x-y)\right|}{(1+x^2)(1+y^2)} && (2.4)\\
&= t^2 \frac{\left|(x-y)(x^2+xy+y^2) + x^2y^2(x-y)\right|}{(1+x^2)(1+y^2)} && (2.5)\\
&= t^2 \frac{\left|x^2+xy+y^2+x^2y^2\right|}{(1+x^2)(1+y^2)} |x-y| && (2.6)\\
&\leqslant t^2 \frac{x^2+y^2+x^2y^2+|xy|}{1+x^2+y^2+x^2y^2} |x-y| && (2.7)\\
&\leqslant t^2 \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + x^2y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} |x-y| && (2.8)\\
&\leqslant \frac{3}{2} t^2 \frac{x^2+y^2+x^2y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} |x-y| && (2.9)\\
&\leqslant \frac{3}{2} t^2 |x-y|. && (2.10)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que f est globalement lipschitzienne par rapport à son second argument. En conséquence du théorème de Cauchy–Lipschtiz, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ le problème (2.1) a une solution globale unique dans $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$.

Il est aussi possible d'utiliser le théorème des accroissements finis. On a

$$\left| \left(\frac{x^3}{1+x^2} \right)' \right| = \left| \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \right| = \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2} \leqslant \frac{x^2+3}{1+x^2} \leqslant 3.$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $\theta_{x,y} \in]0,1[$ tel que

$$\left| \frac{x^3}{1+x^2} - \frac{y^3}{1+y^2} \right| = \left| \left(\frac{z^3}{1+z^2} \right)' \Big|_{z=(y+\theta_{x,y}(x-y))} (x-y) \right| \leqslant 3|x-y|.$$

Ainsi f est globalement lipschitzienne par rapport au deuxième argument :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant \ell(t)|x-y|$$

pour tous $t, x, y \in \mathbb{R}$ avec $\ell(t) = t^2$ (continue en t).

2) Notons g la fonction associée au membre de droite de (2.2a) :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad g(t,x) := \arctan(tx). \tag{2.11}$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, il existe $\theta_{x,y} \in]0,1[$ tel que

$$\arctan(x) - \arctan(y) = (x-y)\arctan'\big(y + \theta_{x,y}(x-y)\big) = \frac{x-y}{1 + \big(y + \theta_{x,y}(x-y)\big)^2}, \tag{2.12}$$

et donc

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x-y|. \tag{2.13}$$

D'où

$$|g(t,x) - g(t,y)| = |\arctan(tx) - \arctan(ty)| \leqslant |tx - ty| = |t| \times |x-y|. \tag{2.14}$$

Ceci prouve que g est lipschitzienne par rapport à son second argument. En conséquence du théorème de Cauchy–Lipschtiz, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ le problème (2.2) a une solution globale unique dans $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert avec $t_0 \in I$, $\boldsymbol{f} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport au second argument, et soit $\ell : I \to \mathbb{R}$ continue.

On suppose $\ell(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in I$, et

$$|\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})| \leqslant \ell(t)(1 + \|\boldsymbol{y}\|^2), \quad \forall t \in I, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t)), & t \in I \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

admet une solution globale unique $\boldsymbol{u} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Indication 1 : Le problème de Cauchy (3.2) admet une solution maximale $(J_{\max}, \boldsymbol{u})$. Si la solution maximale n'est pas globale ($]\alpha,\beta[= J_{\max} \subsetneq I$ avec $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$), alors on a que si $\alpha \in \mathring{I}$, alors $\lim\limits_{t\to\alpha^+} \|\boldsymbol{u}(t)\| = +\infty$ et si $\beta \in \mathring{I}$, alors $\lim\limits_{t\to\beta^-} \|\boldsymbol{u}(t)\| = +\infty$.

Indication 2 : Considérer la quantité $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2$, et séparer les cas $t \in [t_0, \beta[$ et $t \in]\alpha, t_0]$.

Solution

Existence. Supposons que $]\alpha,\beta[= J_{\max} \subsetneq I$. On raisonne par l'absurde en montrant que $\boldsymbol{u}(t)$ est bornée sur $[t_0, \beta[$ si $\beta \in \mathring{I}$, (resp. $]\alpha, t_0]$ si $\alpha \in \mathring{I}$).

Supposons $\beta \in \mathring{I}$. Par l'hypothèse (3.1), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 = \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u}(t)) \leqslant \ell(t)(1+\|\boldsymbol{u}(t)\|^2).$$

Posons $h(t) = \|\boldsymbol{u}(t)\|^2$. Alors,

$$\ln\left(\frac{1+h(t)}{1+h(t_0)}\right) = \int_{t_0}^{t}\frac{h'(s)}{1+h(s)}\mathrm{d}s \leqslant 2\int_{t_0}^{t}\ell(s)\mathrm{d}s.$$

Donc, on a que

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \leqslant (1+\|\boldsymbol{u}(t_0)\|^2)e^{2\int_{t_0}^{t}\ell(s)\mathrm{d}s} - 1.$$

Comme $\ell \in C^0(I,\mathbb{R})$, on a $|\ell(t)| \leqslant L$ sur $[t_0,\beta] \subset I$ pour un $L \in \mathbb{R}_+$, et donc pour $M := \sqrt{1+\|\boldsymbol{u}_0\|^2 e^{(\beta-t_0)L}}$,

$$\|\boldsymbol{u}(t)\| \leqslant M \quad \forall t \in [t_0,\beta[.$$

Ceci est une contradiction avec le fait que $\lim\limits_{t\to\beta^-}\|\boldsymbol{u}(t)\| = +\infty$, et donc $J_{\max}$ n'est pas de la forme $]\alpha,\beta[$ avec $\beta \in \mathring{I}$.

Supposons que $\alpha \in \mathring{I}$. En procédant de façon similaire, on obtient que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 = \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u}(t)) \geqslant -\ell(t)(1+\|\boldsymbol{u}(t)\|^2),$$

d'où on obtient que pour $t \in J_{\max} \cap]-\infty,t_0]$,

$$\ln\left(\frac{1+h(t_0)}{1+h(t)}\right) = \int_{t}^{t_0}\frac{h'(s)}{1+h(s)}\mathrm{d}s \geqslant -2\int_{t}^{t_0}\ell(s)\mathrm{d}s.$$

Ceci permet de conclure

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \leqslant (1+\|\boldsymbol{u}(t_0)\|^2)e^{2\int_{t}^{t_0}\ell(s)\mathrm{d}s} - 1,$$

et donc pour $t \in]\alpha,t_0]$, $\|\boldsymbol{u}(t)\| \leqslant M'$. Ceci est une contradiction avec le fait que $\lim\limits_{t\to\alpha^+}\|\boldsymbol{u}(t)\| = +\infty$, et donc $J_{\max}$ n'est pas de la forme $]\alpha,\beta[$ avec $\alpha \in \mathring{I}$. Ceci implique que $J_{\max} = I$.

Unicité. Par le Théorème 9.32 du polycopié, il existe une unique solution maximale $(J_{\max},\boldsymbol{u})$ du problème du Cauchy ; par le point précédent, $J_{\max} = I$, et donc la solution globale est unique.

Exercice 4.

Soit $b \in \mathbb{R}$; notons $I :=]b,+\infty[$. Soient $(t_0,u_0) \in I \times]0,+\infty[$ et $f \in \mathrm{C}^0(I\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Supposons les existences de $a \in]0,+\infty[$ et $l \in \mathrm{C}^0(I,[a,+\infty[)$ tels que $\forall(t,x) \in I\times]0,+\infty[$, $xf(t,x) \geqslant l(t)(1+x^4)$. Considérons le problème à valeur initiale suivant.

$$\forall t \in]t_0,+\infty[, \quad u'(t) = f(t,u(t)), \tag{4.1a}$$
$$u(t_0) = u_0. \tag{4.1b}$$

1) Justifier l'existence d'une solution locale à (4.1).

2) Prouver qu'aucune solution globale n'existe.

Solution

1) Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t \in I, \quad u'(t) = f(t, u(t)), \tag{4.2a}$$
$$u(t_0) = u_0. \tag{4.2b}$$

Puisque f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, le théorème de Cauchy–Lipschitz garantit l'existence d'un intervalle $J \subset I$ comprenant t_0 et de $u \in \mathrm{C}^1(J)$ tels que (J, u) soit une solution locale de (4.2). La restriction de u à $J \cap [t_0, +\infty[$ est donc une solution locale de (4.1).

2) Soit (J, u) une solution locale de (4.1). Puisque $t_0 \in J$, $u \in \mathrm{C}^0(J)$ et $u(t_0) = u_0 > 0$, il existe un voisinage de t_0 sur lequel u est strictement positive. Nous choisissons alors $\delta \in]0, +\infty[$ tel que, $\forall t \in \mathrm{B}(t_0, \delta)$, $u(t) > 0$. Soit $t \in]t_0, t_0 + \delta[$:

$$\frac{1}{2}(u^2)'(t) = u'(t)u(t) = u(t)f(t, u(t)) \geqslant l(t)(1 + u(t)^4) \geqslant a(1 + u(t)^4). \tag{4.3}$$

Puisque $u \in \mathrm{C}^0(J)$ et $\mathrm{B}(t_0, \delta) \subset J$, $u \in \mathrm{C}^0([t_0, t])$; par conséquent, u est bornée sur $[t_0, t]$. Ainsi, on déduit de (4.3)

$$\int_{t_0}^{t} 2a \leqslant \int_{t_0}^{t} \frac{(u^2)'(s)}{1 + u(s)^4} \,\mathrm{d}s = \int_{u_0^2}^{u(t)^2} \frac{\mathrm{d}v}{1 + v^2} = [\arctan v]_{v=u_0^2}^{u(t)^2}. \tag{4.4}$$

En rappelant que $a > 0$, on obtient

$$\forall t \in]t_0, t_0 + \delta[, \quad \arctan u(t)^2 \geqslant \arctan u_0^2 + 2a(t - t_0) \geqslant \arctan u_0^2 \tag{4.5}$$

donc

$$u(t)^2 \geqslant \tan\big(\arctan u_0^2 + 2a(t - t_0)\big) \geqslant u_0^2 > 0 \tag{4.6}$$

Nous pouvons déduire deux choses de (4.6).

Premièrement, nous pouvons choisir $\delta = \sup J - t_0$, i.e. u ne s'annule pas sur $J \cap]t_0, +\infty[$. Ceci peut se prouver par contradiction : supposons que

$$Z := \{t \in J \cap]t_0, +\infty[\,:\, u(t) = 0\} \neq \varnothing. \tag{4.7}$$

Puisque Z est minoré et non vide, il a un infimum. L'inégalité (4.6) est alors valide pour tout $t \in]t_0, \inf Z[$ et, puisque $\inf Z \in J$, la continuité de u implique que $u(\inf Z) = \lim_{\inf Z} u \geqslant u_0 > 0$. Il existe donc un voisinage de $\inf Z$ sur lequel u est non nul : cette contradiction avec la définition de Z prouve que l'hypothèse (4.7) est fausse.

Deuxièmement, $J \not\supseteq [t_0, +\infty[$, i.e. u ne peut être une solution globale. Notons

$$\tau := t_0 + \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan u_0^2}{2a} \tag{4.8}$$

et remarquons que

$$\lim_{t \to \tau^-} \tan\big(\arctan u_0^2 + 2a(t - t_0)\big) = +\infty. \tag{4.9}$$

Nous déduisons de (4.9) et (4.6) que $\lim_{\tau^-} u = +\infty$. Alors J est nécessairement majoré par τ, ce qui implique que u ne peut être une solution globale. Puisque (J, u) est une solution locale quelconque, nous avons prouvé qu'il n'existe pas de solution globale à (4.1).