# Série 20 du mercredi 14 mai 2025

## Exercice 1.

Considérons la fonction $u$ solution de l'équation

$$\begin{cases} u' = u, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Calculer explicitement la suite d'itérées définie par

$$u_0 = 1 \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall (j,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \;\; u_j(t) := 1 + \int_0^t u_{j-1}.$$

## Exercice 2.

Soient $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$. Discuter l'existence et – le cas échéant – l'unicité d'une solution globale des problèmes de Cauchy suivants.

1)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \frac{t^2 u(t)^3}{1 + u(t)^2}, \tag{2.1a}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{2.1b}$$

2)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \arctan(tu(t)), \tag{2.2a}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{2.2b}$$

## Exercice 3.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert avec $t_0 \in I$, $\boldsymbol{f} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport au second argument, et soit $\ell : I \to \mathbb{R}$ continue.

On suppose $\ell(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in I$, et

$$|\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leqslant \ell(t)(1 + \|\boldsymbol{y}\|^2), \quad \forall t \in I, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t)), & t \in I \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

admet une solution globale unique $\boldsymbol{u} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

*Indication 1 :* Le problème de Cauchy (3.2) admet une solution maximale $(J_{\max}, \boldsymbol{u})$. Si la solution maximale n'est pas globale ($]\alpha, \beta[ = J_{\max} \subsetneq I$ avec $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$), alors on a que si $\alpha \in \mathring{I}$, alors $\lim\limits_{t \to \alpha^+} \|\boldsymbol{u}(t)\| = +\infty$ et si $\beta \in \mathring{I}$, alors $\lim\limits_{t \to \beta^-} \|\boldsymbol{u}(t)\| = +\infty$.

*Indication 2 :* Considérer la quantité $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2$, et séparer les cas $t \in [t_0, \beta[$ et $t \in ]\alpha, t_0]$.

## Exercice 4.

Soit $b \in \mathbb{R}$ ; notons $I := ]b, +\infty[$. Soient $(t_0, u_0) \in I \times ]0, +\infty[$ et $f \in \mathrm{C}^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Supposons les existences de $a \in ]0, +\infty[$ et $l \in \mathrm{C}^0(I, [a, +\infty[)$ tels que $\forall (t, x) \in I \times ]0, +\infty[$, $x f(t, x) \geqslant l(t)(1 + x^4)$. Considérons le problème à valeur initiale suivant.

$$\forall t \in ]t_0, +\infty[, \quad u'(t) = f(t, u(t)), \tag{4.1a}$$
$$u(t_0) = u_0. \tag{4.1b}$$

1) Justifier l'existence d'une solution locale à (4.1).
2) Prouver qu'aucune solution globale n'existe.