Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-05-12 au 2025-05-16

Série 20 du lundi 12 mai 2025

Exercice 1.

Trouver la solution de l'équation de Ricatti définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(x) = y^2(x) - 2\mathrm{e}^x y(x) + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x. \end{cases} \tag{Ricatti}$$

Indication. Utiliser le changement de variables $z(x) = y(x) - \mathrm{e}^x$.

Solution

L'exponentielle est une solution particulière de (Ricatti), si on ignore la condition en 0. Le changement de variable $z(x) = y(x) - \mathrm{e}^x$ transforme l'équation de Ricatti en l'équation de Bernoulli suivante :

$$\begin{cases} z(0) = -1, \\ z' = z^2. \end{cases} \tag{Bernoulli}$$

La solution de (Bernoulli) est définie pour tout $x \in \left]-1, +\infty\right[$ par

$$z(x) = -\frac{1}{1+x}. \tag{1.1}$$

Par conséquent la solution maximale cherchée est définie pour tout $x \in \left]-1, +\infty\right[$ par

$$y(x) = z(x) + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - \frac{1}{1+x}. \tag{1.2}$$

Exercice 2.

Considérons le problème de Cauchy défini pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} u(0) = 1, \\ u'(t) = t^4 + 2t - t^2 u(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Prouver, en la calculant, que (2.1) admet une unique solution globale.

Solution

Nous proposons deux méthodes de calcul alternatives. La première méthode montre facilement l'unicité de la solution globale.

Méthode du facteur intégrant. Choisissons une primitive de la fonction $t \mapsto t^2$: prenons $t \mapsto \frac{1}{3}t^3$.

Une fonction u est solution de (2.1) si et seulement si

$$\begin{cases} u(0) = 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{t^3/3}u(t)\right) = \mathrm{e}^{t^3/3}(t^4 + 2t). \end{cases} \tag{2.2}$$

On remarque que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2\mathrm{e}^{t^3/3} + c$ est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{t^3/3}(t^4 + 2t)$. Ainsi u est solution de (2.2) si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u(0) = 1, \\ \mathrm{e}^{t^3/3}u(t) = t^2\mathrm{e}^{t^3/3} + c, \end{cases} \tag{2.3}$$

autrement dit,

$$\begin{cases} u(0) = 1, \\ u(t) = t^2 + c\mathrm{e}^{-t^3/3}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Le seul choix possible est $c = 1$ et donne donc l'unique solution globale : $t \mapsto t^2 + \mathrm{e}^{-t^3/3}$.

Méthode de la variation de la constante. Le problème homogène (i.e. les termes $t^4 + 2t$ sont remplacés par 0) s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + t^2u(t) = 0. \tag{2.5}$$

Supposons qu'il existe un intervalle ouvert non-trivial $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel u ne s'annule pas. Alors (2.5) devient

$$\forall t \in I, \quad \frac{u'(t)}{u(t)} = -t^2. \tag{2.6}$$

En cherchant les primitives de chaque côté, on obtient que toutes les fonctions $u \in \mathrm{C}^1(I, \mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ln|u(t)| = -t^3/3 + a$ vérifient (2.6). Par conséquent, les éléments de $\{t \mapsto \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-t^3/3},\ t \mapsto -\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-t^3/3} : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont solutions de (2.6). Ces solutions peuvent être prolongées sur $\mathbb{R}$; ces prolongement sont continûment différentiables et ne s'annulent pas. Par conséquent, les éléments de $\{t \mapsto \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-t^3/3},\ t \mapsto -\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-t^3/3} : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont solution de (2.5), et il y a encore la fonction nulle qui est solution. Finalement, tous les éléments de $\{t \mapsto c\mathrm{e}^{-t^3/3} : c \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont solution de (2.5).
Faisons maintenant varier la constante c qui paramétrise l'ensemble des solutions trouvées. On cherche une solution particulière u telle que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$u'(t) = t^4 + 2t - t^2u(t) \tag{2.7}$$

et qu'il existe une fonction c telle que

$$u(t) = c(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}. \tag{2.8}$$

En dérivant cette expression, on trouve

$$u'(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}(c'(t) - t^2c(t)) \tag{2.9}$$

d'où, en substituant dans (2.7),

$$c'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} = t^4 + 2t. \tag{2.10}$$

On est donc amenés à trouver les primitives de $t \mapsto e^{t^3/3}(t^4+2t)$, qui sont $\{t \mapsto e^{t^3/3}t^2 + a : a \in \mathbb{R}\}$. Pour obtenir une solution de (2.1), on impose $u(0) = 1$. Ceci équivaut à $c(0) = 1$ (voir (2.8)), donc nécessairement c est donnée par $t \mapsto e^{t^3/3}t^2+1$. On obtient ainsi la solution globale u de (2.1) définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$u(t) := \left(e^{\frac{t^3}{3}}t^2 + 1\right)e^{-\frac{t^3}{3}} = e^{-\frac{t^3}{3}} + t^2. \tag{2.11}$$

La première approche (par le facteur intégrant) montre qu'il y a unicité de la solution globale.

Exercice 3.

Trouver les intégrales de l'équation différentielle définie pour tout $t \in \,]3, +\infty[$ par

$$(t-3)u'(t) - 3u(t) = t+5. \tag{3.1}$$

Solution

Nous proposons deux méthodes de résolution alternatives.

Méthode de la variation de la constante. L'équation homogène s'écrit, pour tout $t \in \,]3, +\infty[$,

$$w'(t)(t-3) = 3w(t). \tag{3.2}$$

Autrement dit, en supposant que w ne s'annule pas,

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{3}{t-3}. \tag{3.3}$$

Intégrer donne que pour tout $\tilde{c} \in \,]0, +\infty[$,

$$\ln|w(t)| = 3\ln(t-3) + \ln(\tilde{c}), \tag{3.4}$$

décrit une solution de (3.2), donc

$$w \in \{t \mapsto c(t-3)^3 : c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}. \tag{3.5}$$

Puisque la fonction nulle est aussi une solution de (3.2), tous les éléments de

$$\{t \mapsto c(t-3)^3 : c \in \mathbb{R}\} \tag{3.6}$$

sont solution de (3.2).

Faisons maintenant varier la constante c qui paramétrise l'ensemble des solutions trouvées. On cherche une solution particulière u telle que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(t-3)u'(t) - 3u(t) = t+5 \tag{3.7}$$

et qu'il existe une fonction c telle que

$$u(t) = c(t)(t-3)^3 \tag{3.8}$$

d'où, en substituant dans (3.7),

$$c'(t) = \frac{t+5}{(t-3)^4} = \frac{t-3+8}{(t-3)^4} = \frac{1}{(t-3)^3} + \frac{8}{(t-3)^4}. \tag{3.9}$$

Or $\forall b \in \mathbb{R}$ une primitive est

$$c(t) = b - \frac{1}{2(t-3)^2} - \frac{8}{3(t-3)^3} = b - \frac{3(t-3)+16}{6(t-3)^3} = b - \frac{3t+7}{6(t-3)^3}. \tag{3.10}$$

On obtient finalement la famille de solutions de (3.7)

$$\left\{t \mapsto b(t-3)^3 - \frac{3t+7}{6} : b \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3.11}$$

C'est déjà la solution générale de (3.1). Néanmoins, dans l'esprit de chercher une solution particulière, choisissons par exemple $b = 0$ et donc la solution particulière $t \mapsto -\frac{3t+7}{6}$. La solution générale de (3.1) s'obtient en additionnant cette solution particulière aux solutions (3.6) de (3.2). On trouve ainsi la famille de solutions

$$\left\{t \mapsto c(t-3)^3 - \frac{3t+7}{6} : c \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3.12}$$

Méthode du facteur intégrant. Soit P une primitive de $t \mapsto -3(t-3)^{-1}$ sur $]3, +\infty[$. Il est équivalent à (3.1) que pour tout $t \in]3, +\infty[$:

$$u'(t) - \frac{3}{t-3}u(t) = \frac{t+5}{t-3} \tag{3.13}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{P(t)}u(t)\right) = \mathrm{e}^{P(t)}\frac{t+5}{t-3}. \tag{3.14}$$

Choisissons P donnée par $t \mapsto -3\ln(t-3)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u(t)}{(t-3)^3}\right) = \frac{t+5}{(t-3)^4} = \frac{t-3+8}{(t-3)^4}, \tag{3.15}$$

or les primitives du membre de droite sont

$$\left\{t \mapsto -\frac{1}{2(t-3)^2} - \frac{8}{3(t-3)^3} + c : c \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3.16}$$

Ainsi, intégrer (3.15) donne que pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(t) &= (t-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2(t-3)^2} - \frac{8}{3(t-3)^3} + c\right) && (3.17)\\ &= -\frac{t-3}{2} - \frac{8}{3} + c(t-3)^3 && (3.18)\\ &= c(t-3)^3 - \frac{3t+7}{6} && (3.19) \end{aligned}$$

décrit une solution de (3.1). Par conséquent, l'ensemble des solutions de (3.1) est

$$\left\{t \mapsto c(t-3)^3 - \frac{3t+7}{6} : c \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3.20}$$

Exercice 4.

Trouver les intégrales de l'équation différentielle définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$u'(t) = -u(t) + \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{t} + 3\sin t + 2\mathrm{e}^{-t}. \tag{4.1}$$

Solution

Recherchons une solution particulière de (4.1) sous la forme

$$v(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} + \beta \mathrm{e}^{t} + \gamma \sin t + \delta \cos t + \mu t \mathrm{e}^{-t}. \tag{4.2}$$

En calculant v', on obtient

$$v'(t) = 2\alpha \mathrm{e}^{2t} + \beta \mathrm{e}^{t} + \gamma \cos t - \delta \sin t + \mu \mathrm{e}^{-t} - \mu t \mathrm{e}^{-t}, \tag{4.3}$$

ainsi

$$v'(t) + v(t) = 3\alpha \mathrm{e}^{2t} + 2\beta \mathrm{e}^{t} + (\gamma + \delta)\cos t + (\gamma - \delta)\sin t + \mu \mathrm{e}^{-t}. \tag{4.4}$$

En identifiant avec (4.1), on obtient :

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha &= 1 \\ 2\beta &= 1 \\ \gamma + \delta &= 0 \\ \gamma - \delta &= 3 \\ \mu &= 2 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \\ \gamma = \dfrac{3}{2} \\ \delta = -\dfrac{3}{2} \\ \mu = 2 \end{cases} \tag{4.5}$$

d'où une solution particulière

$$v(t) = \frac{1}{6}(2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{t} - 9\cos t + 9\sin t) + 2t\mathrm{e}^{-t}. \tag{4.6}$$

D'autre part, l'ensemble des solutions générales de l'équation homogène sans second membre $w' = -w$ est $\{t \mapsto c\mathrm{e}^{-t} : c \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, notons u_c la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$u_c(t) = c\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}(2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{t} - 9\cos t + 9\sin t) + 2t\mathrm{e}^{-t}. \tag{4.7}$$

Les intégrales demandées sont $\{u_c : c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient u, $\beta \in \mathrm{C}^0([a, b[)$. Supposons que u soit différentiable sur $]a, b[$ et que

$$\forall t \in \,]a, b[, \quad u'(t) \leqslant \beta(t)u(t). \tag{5.1}$$

Prouver que

$$\forall t \in [a, b[, \quad u(t) \leqslant u(a)\exp\left(\int_a^t \beta\right). \tag{5.2}$$

Indication. Considérer le facteur intégrant h défini pour tout $t \in [a,b[$ par $h(t) \coloneqq \exp(-\int_a^t \beta)$. Étudier la dérivée de $h \times u$.

Remarque. Ce résultat est connu comme le « lemme de Grönwall ».

Solution

Notons $v \coloneqq h \times u$: $v \in \mathrm{C}^0([a,b[) \cap \mathrm{C}^1(]a,b[)$ et

$$v' = h'u + hu' = -h\beta u + hu'. \tag{5.3}$$

L'hypothèse (5.1) et (5.3) impliquent que v est décroissante : $\forall t \in [a,b[$, $v(t) \leqslant v(a)$. Autrement écrit :

$$\forall t \in [a,b[, \quad u(t) \leqslant u(a) \exp\left(\int_a^t \beta\right). \tag{5.4}$$