Analyse avancée II | Semaine du 2025-05-12 au 2025-05-16
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

# Série 20 du lundi 12 mai 2025

## Exercice 1.

Trouver la solution de l'équation de Ricatti définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(x) = y^2(x) - 2e^x y(x) + e^{2x} + e^x. \end{cases} \tag{Ricatti}$$

*Indication.* Utiliser le changement de variables $z(x) = y(x) - e^x$.

## Exercice 2.

Considérons le problème de Cauchy défini pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} u(0) = 1, \\ u'(t) = t^4 + 2t - t^2 u(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Prouver, en la calculant, que (2.1) admet une unique solution globale.

## Exercice 3.

Trouver les intégrales de l'équation différentielle définie pour tout $t \in ]3, +\infty[$ par

$$(t-3)u'(t) - 3u(t) = t + 5. \tag{3.1}$$

## Exercice 4.

Trouver les intégrales de l'équation différentielle définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$u'(t) = -u(t) + e^{2t} + e^t + 3\sin t + 2e^{-t}. \tag{4.1}$$

## Exercice 5.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient $u$, $\beta \in C^0([a, b[)$. Supposons que $u$ soit différentiable sur $]a, b[$ et que

$$\forall t \in ]a, b[, \quad u'(t) \leqslant \beta(t)u(t). \tag{5.1}$$

Prouver que

$$\forall t \in [a, b[, \quad u(t) \leqslant u(a) \exp\left(\int_a^t \beta\right). \tag{5.2}$$

*Indication.* Considérer le facteur intégrant $h$ défini pour tout $t \in [a, b[$ par $h(t) \coloneqq \exp(-\int_a^t \beta)$. Étudier la dérivée de $h \times u$.

*Remarque.* Ce résultat est connu comme le « lemme de Grönwall ».