Série 22 du mercredi 7 mai 2025

Exercice 1.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2 - 5u(t) + 6, & \forall t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Prouver l'existence d'une solution locale en en calculant une par séparation de variables. Donner les valeurs de u_0 pour lesquelles il existe une solution globale.

Solution

Pour $-\infty \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant +\infty$, supposons que $u \in C^1(]t_1, t_3[)$ satisfait $u' = u^2 - 5u + 6$. Supposons aussi que le membre de doite ne s'annule jamais : $u(t) \notin \{2, 3\}$ pour tout $t \in]t_1, t_3[$. Alors, en posant $u_2 = u(t_2)$, on obtient pour $t \in]t_1, t_3[$,

$$\int_{t_2}^{t} \frac{u'(s)}{u(s)^2 - 5u(s) + 6} \, \mathrm{d}s = \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}s = t - t_2. \tag{1.2}$$

On décompose l'intégrande de gauche en éléments simples et on trouve

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{t} \frac{u'(s)}{u(s)^2 - 5u(s) + 6} \, \mathrm{d}s &= \int_{t_2}^{t} \frac{u'(s)}{u(s) - 3} \, \mathrm{d}s - \int_{t_2}^{t} \frac{u'(s)}{u(s) - 2} \, \mathrm{d}s & (1.3) \\ &= \ln\left(\left| \frac{u(t) - 3}{u_2 - 3} \right| \right) - \ln\left(\left| \frac{u(t) - 2}{u_2 - 2} \right| \right) & (1.4) \\ &= \ln\left(\left| \frac{u(t) - 3}{u(t) - 2} \right| \right) - \ln\left(\left| \frac{u_2 - 3}{u_2 - 2} \right| \right). & (1.5) \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant avec (1.2), on trouve

$$\left| \frac{u(t) - 3}{u(t) - 2} \right| = \left| \frac{u_2 - 3}{u_2 - 2} \right| e^{t - t_2}. \tag{1.6}$$

Par continuité, la première fraction a un signe constant et donc, en considérant le cas particulier $t = t_2$:

$$\forall t \in]t_1, t_3[, \quad \frac{u_2 - 3}{u_2 - 2} e^{t - t_2} = \frac{u(t) - 3}{u(t) - 2} \neq 1. \tag{1.7}$$

Alors, $\forall t \in]t_1, t_3[$,

$$u(t) = \frac{3 - 2e^{t - t_2} \frac{u_2 - 3}{u_2 - 2}}{1 - e^{t - t_2} \frac{u_2 - 3}{u_2 - 2}} \tag{1.8}$$

(([1.7](#)) assure que le dénominateur ne s'annule pas).

Réciproquement, étant donnés $t_2 \in \mathbb{R}$ et $u_2 \notin \{2, 3\}$, l'expression (1.8) définit une fonction sur tout intervalle $]t_1, t_3[$ tel que $t_2 \in]t_1, t_3[$ et que le dénominateur ne s'y annule pas. De plus $u(t) \notin \{2, 3\}$ sur $]t_1, t_3[$, $u(t_2) = u_2$ et on vérifie directement que u est bien solution sur $]t_1, t_3[$. Il y a trois cas :

- Si $u_2 \in]2, 3[$, le dénominateur dans (1.8) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on peut choisir $]t_1, t_3[=]-\infty, \infty[$.
- Si $u_2 > 3$, le dénominateur s'annule en un unique $t_3 \in \mathbb{R}$ et $t_3 > t_2$ car

$$e^{t_3 - t_2} = (u_2 - 2)/(u_2 - 3) > 1.$$

  On peut donc choisir $]t_1, t_3[=] - \infty, t_3[\ni t_2$ et, dans ce cas, $\lim_{t \to t_3^-} u(t) = +\infty$ (le dénominateur de u étant strictement décroissant et le numérateur, en t_3, valant 1).
- Si $u_2 < 2$, le dénominateur s'annule en un unique $t_1 \in \mathbb{R}$, $e^{t_1 - t_2} < 1$, $t_1 < t_2$ et on peut choisir $]t_1, t_3[=]t_1, +\infty[\ni t_2$. Dans ce cas, $\lim_{t \to t_1^+} u(t) = -\infty$.

Supposons maintenant que $t_2 = 0$, $u_0 := u_2 \notin \{2, 3\}$ et on ne s'intéresse qu'à $t \in [0, \infty[$, comme dans l'énoncé. On obtient dans ce cas une solution locale

$$u(t) = \frac{3 - 2e^t \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2}}{1 - e^t \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2}} \tag{1.9}$$

dans $C^0([0, T[) \cap C^1(]0, T[)$ si $T > 0$ est suffisamment petit. Comme vu ci-dessus, on peut en fait choisir $T = +\infty$ si $u_0 \in]2, 3[\cup] - \infty, 2[$, ce qui donne une solution gobale. Si $u_0 > 3$, on peut choisir $T > 0$ tel que le dénominateur s'annule en T. Dans ce dernier cas, $\lim_{t \to T^-} u(t) = +\infty$ et la solution n'est pas globale. Il y a encore deux autres solutions globales : les solutions constantes $u = 2$ sur $[0, +\infty[$ et $u = 3$ sur $[0, +\infty[$.

Nous avons obtenu ainsi toutes les solutions globales demandées dans l'énoncé. En effet, si $u \in C^0([0, +\infty[) \cap C^1(]0, +\infty[)$ est une solution globale avec $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$, alors soit $u = 2$ sur $[0, +\infty[$, soit $u = 3$ sur $[0, +\infty[$, soit il existe $t_2 \geqslant 0$ tel que $u(t_2) \notin \{2, 3\}$. Supposons être dans cette dernière situation, et on peut alors même supposé que $t_2 > 0$ (en effet, si $u(0) \notin \{2, 3\}$, alors $u(t_2) \notin \{2, 3\}$ pour tout $t_2 > 0$ suffisamment petit, grâce à la continuité de u en $t = 0$).

Par continuité de u, $\{t \in]0, +\infty[: u(t) \notin \{2, 3\}\}$ est un ouvert contenant t_2. Soit $]t_1, t_3[\subset]0, +\infty[$, le plus grand intervalle ouvert contenant t_2 sur lequel u n'est jamais dans $\{2, 3\}$. Alors $u(t_1) \in \{2, 3\}$ si $t_1 > 0$, et $u(t_3) \in \{2, 3\}$ si $t_3 < +\infty$. Par l'analyse ci-dessus, u est de la forme (1.8) sur $]t_1, t_3[$ et, pour une solution de cette forme, il est impossible que $\lim_{t \to t_1^+} u(t) \in \{2, 3\}$ ou que $\lim_{t \to t_3^-} u(t) \in \{2, 3\}$ avec $t_3 < \infty$. D'où $]t_1, t_3[=]0, +\infty[$, $u(0) = u(t_1) \notin \{2, 3\}$ et u vaut (1.8) sur $[0, +\infty[$. En fait u donnée par (1.8) est définie sur un intervalle ouvert contenant $[0, +\infty[$ et, par l'analyse ci-dessus, u est nécessairement aussi de la forme (1.9) sur cet intervalle : c'est donc une des solutions globales déjà obtenues.

La figure 1 donne un aperçu des solutions locales de (1.1) pour $u_0 \in \{1, 2, 2.5, 3, 3.5\}$. Les flèches correspondent à $(1, f(t, u)) := (1, u^2 - 5u + 6)$ (normalisé) et donc la pente d'une solution u qui passerait par les points de la forme $(t, u(t))$. On peut se convaincre qu'aucune des solutions n'intersecte l'un des axes d'ordonnée 2 ou 3, sauf si $u_0 \in \{2, 3\}$.

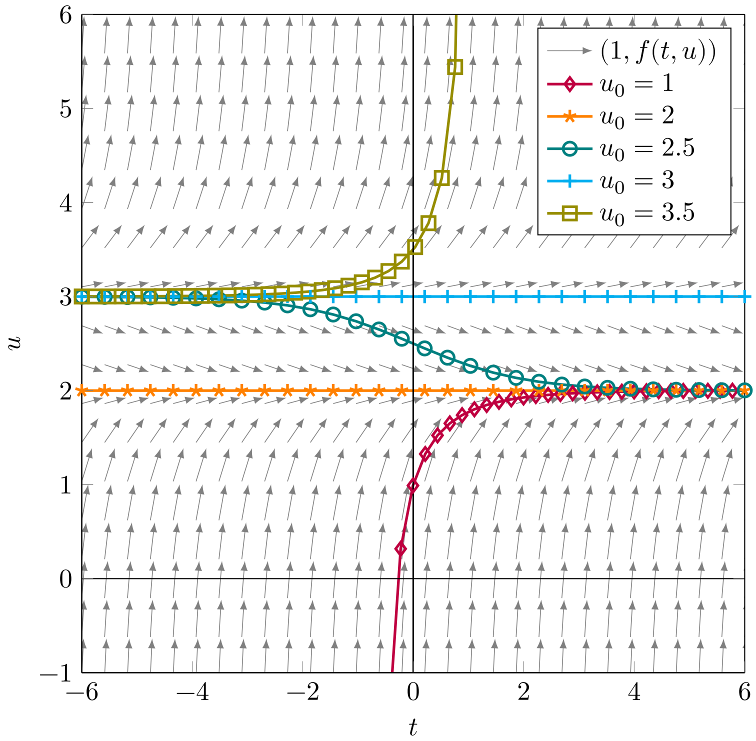

FIGURE 1 – Visualisation du champ vectoriel $(1, f(t, u))$ et de $u(t)$ pour $u_0 \in \{1, 2, 2.5, 3, 3.5\}$.

Exercice 2.

On considère le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^{1/3}, & \forall t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^1([0, +\infty[)$. De même, trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^2([0, +\infty[)$.

Remarque. Dans cet énoncé apparaît la fonction impaire "racine cubique" definie sur tout $\mathbb{R}$. De plus $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ signifie que : (I) $u \in \mathrm{C}^0([0, +\infty[) \cap \mathrm{C}^1(]0, +\infty[)$; (II) la dérivée à droite $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} (u(t) - u(0))/t$ existe ; et (III) $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} u'(t)$. Dans ce contexte, on note alors $u'(0) := u'_+(0)$. De même, $u \in \mathrm{C}^2([0, +\infty[)$ signifie que $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ et $u' \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$, où u' est définie en 0 dans le sens ci-dessus.

Solution

Listons des solutions possibles dans $C^1([0, +\infty[)$. Le problème (2.1) suscite immédiatement trois remarques :

— la fonction nulle est une solution, qui est même dans $\mathrm{C}^2([0, +\infty[)$;

— si v est une solution globale de (2.1), alors $-v$ en est également une ;

— une solution strictement positive (res. négative) sur un intervalle ouvert y est strictement croissante (resp. décroissante).

Pour trouver d'autres solutions de (2.1), supposons que $\forall t \in]0,+\infty[$, $u(t) > 0$. On peut alors diviser l'équation différentielle de (2.1) par $u(t)^{1/3}$ puis intégrer. Pour tout $t \in]0,+\infty[$ et tout $\alpha \in]0,t[$,

$$\int_\alpha^t \frac{u'(s)}{u(s)^{1/3}}\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^t 1\,\mathrm{d}s = t-\alpha \tag{2.2}$$

d'où

$$\left[\frac{3}{2}u(s)^{2/3}\right]_{s=\alpha}^t = t-\alpha. \tag{2.3}$$

Puisque $\lim_{\alpha\to 0^+} u(\alpha) = u(0) = 0$, on obtient

$$u(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}. \tag{2.4}$$

La fonction définie par (2.4) est bien une solution dans $\mathrm{C}^1([0,+\infty[) \cap \mathrm{C}^2(]0,+\infty[)$.

Notons que, pour tout $c \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto (2(t-c)/3)^{3/2}$ satisfait l'équation différentielle de (2.1) sur $]c,+\infty[$. On peut en construire une solution dans $[0,+\infty[$. On définit la fonction u_c par

$$u_c(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant c \\ \left(\frac{2}{3}(t-c)\right)^{3/2} & \text{si } t > c. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pour tout $c \in [0,+\infty[$, u_c est une solution dans $\mathrm{C}^1([0,+\infty[) \cap \mathrm{C}^2([0,+\infty[\setminus\{c\})$. Cette famille de solutions, leurs opposées, et la fonction nulle sont toutes les solutions globales trouvées jusqu'ici. Prouvons maintenant que ce sont les seules. Soit $u \in \mathrm{C}^0([0,+\infty[) \cap \mathrm{C}^1(]0,+\infty[)$ solution non-nulle de (2.1), i.e. il existe $\bar{t} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u(\bar{t}) \neq 0$. On va montrer par une suite de raisonnements que u est nécessairement de la forme u_c ou $-u_c$. Nous en conclurons que les seules solutions globales possibles sont celles ci-dessus.

Intuitivement, si u est strictement positive alors u' l'est aussi donc u va croître encore plus. Similairement, si u est strictement négative alors u' l'est aussi et u va décroître encore plus. L'ensemble $\{t \in [0,+\infty[: \forall s \in [0,t],\ u(s) = 0\}$ est majoré par $\bar{t}$; notons t_0 son supremum. Alors u est nulle sur $[0,t_0]$, car elle est continue. Prouvons par contradiction que $\forall t \in]t_0,+\infty[$, $u(t) \neq 0$. Supposons donc l'existence de $\beta \in]t_0,+\infty[$ tel que $u(\beta) = 0$. Par définition de t_0, u n'est pas entièrement nulle sur $[t_0,\beta]$, et donc u restreinte à $[t_0,\beta]$ admet un extremum non nul. Choisissons un point $\gamma \in]t_0,\beta[$ où u atteint cet extremum : $u(\gamma) \neq 0$ et $0 = u'(\gamma) = u(\gamma)^{1/3}$: contradiction. Nous avons prouvé que u était soit strictement positive, soit strictement négative sur $]t_0,+\infty[$. On supposera désormais que u est strictement positive. Le raisonnement demeure général puisque, si v est une solution globale, $-v$ l'est aussi.

Soient $s \in]t_0,+\infty[$ et $t \in]s,+\infty[$. Pour $r \in [s,t]$ on a $u(r) > 0$ et on peut diviser l'équation $u'(r) = u(r)^{1/3}$ par $u(r)^{1/3}$, obtenant

$$t-s = \int_s^t \mathrm{d}r = \int_s^t u'(r)u(r)^{-1/3}\,\mathrm{d}r = \frac{3}{2}\left(u(t)^{2/3} - u(s)^{2/3}\right). \tag{2.6}$$

En faisant tendre s vers t_0 on trouve $u(t) = \left(\frac{2}{3}(t-t_0)\right)^{3/2}$, pour $t > t_0$. Finalement, on a

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,t_0], \\ \left(\frac{2}{3}(t-t_0)\right)^{3/2} & \text{si } t > t_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Donc, la totalité des solutions globales est donnée par les fonctions de la forme (2.7) avec un certain $t_0 \geqslant 0$, leurs opposées et la fonction nulle. Seule la fonction nulle est de classe $C^2([0,+\infty[)$.

Exercice 3.

Trouver une fonction $v \in \mathrm{C}^1(]-1,1[)$ qui ne s'annule qu'en 0 et qui vérifie pour tout $x \in]-1,1[$

$$\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+v(x)^2).$$

Solution

En évaluant l'équation en $x=0$ on trouve $0 = \frac{1}{2}\ln(1+v(0)^2)$, donc forcément $v(0)=0$. On dérive l'équation des deux côtés et on obtient

$$v(x) = \frac{v(x)v'(x)}{1+v(x)^2}.$$

Supposant $v(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{v'}{1+v^2} = 1.$$

Résolvons cette équation différentielle. Comme on souhaite $v(0)=0$, mais que, d'autre part, on a supposé $v(x) \neq 0$, choisissons α et x non nuls et de même signe, de telle manière que l'intervalle fermé compris entre α et x ne contienne pas 0. En intégrant, on obtient

$$\int_\alpha^x \frac{v'(s)}{1+v(s)^2}ds = x-\alpha \;\Leftrightarrow\; \int_{v(\alpha)}^{v(x)} \frac{1}{1+z^2}dz = x-\alpha \;\Leftrightarrow\; \arctan(v(x)) - \arctan(v(\alpha)) = x-\alpha.$$

Comme on souhaite $v(0)=0$, on est conduit, en laissant $\alpha \to 0$, à $v(x)=\tan(x)$. Un calcul direct montre que v vérifie bien le problème énoncé sur l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 4.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$; notons $I = [t_0,+\infty[$. Soient $f \in \mathrm{C}^0(I\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u : I \to \mathbb{R}$. Supposons que : (I) $u \in \mathrm{C}^0(I)$; (II) u est dérivable sur $\mathring{I} =]t_0,+\infty[$; et (III) $\forall t \in \mathring{I}$, $u'(t) = f(t,u(t))$. Démontrer que $u \in \mathrm{C}^1(I)$.

Solution

Notons $f_u := t \mapsto f(t,u(t))$; cette fonction est continue sur $[t_0,+\infty[$ en tant que composition de fonctions continues. Puisque $u' = f_u$ sur $]t_0,+\infty[$, on a $u \in \mathrm{C}^1(]t_0,+\infty[)$; d'où $\forall t \in]t_0,+\infty[$, $u \in \mathrm{C}^0([t_0,t]) \cap \mathrm{C}^1(]t_0,t[)$.

Étudions maintenant la régularité de u en t_0. Le théorème des accroissements finis assure qu'il existe $c_t \in]t_0,t[$ tel que

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} = u'(c_t) = f_u(c_t). \tag{4.1}$$

Il reste donc à étudier la limite de $t \mapsto f_u(c_t)$ en t_0. Soit une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0, +\infty[$ qui converge vers t_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 < c_{s_n} < s_n$ donc le théorème des deux gendarmes assure que $(c_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers t_0. Puisque $f_u \in \mathrm{C}^0([t_0, +\infty[)$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_u(c_{s_n}) = f_u(t_0). \tag{4.2}$$

Ainsi

$$\lim_{t\to t_0^+} \frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0^+} f_u(c_t) = f_u(t_0) \tag{4.3}$$

La fonction u est donc dérivable à droite en t_0, sa dérivée à droite valant $f_u(t_0)$. Finalement $u \in \mathrm{C}^1([t_0, +\infty[)$ car $f_u \in \mathrm{C}^0([t_0, +\infty[)$.