Série 22 du mercredi 7 mai 2025

Exercice 1.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2 - 5u(t) + 6, & \forall t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Prouver l'existence d'une solution locale en en calculant une par séparation de variables. Donner les valeurs de u_0 pour lesquelles il existe une solution globale.

Exercice 2.

On considère le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^{1/3}, & \forall t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^1([0, +\infty[)$. De même, trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^2([0, +\infty[)$.

Remarque. Dans cet énoncé apparaît la fonction impaire "racine cubique" definie sur tout $\mathbb{R}$. De plus $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ signifie que : (I) $u \in \mathrm{C}^0([0, +\infty[) \cap \mathrm{C}^1(]0, +\infty[)$; (II) la dérivée à droite $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+}(u(t) - u(0))/t$ existe ; et (III) $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} u'(t)$. Dans ce contexte, on note alors $u'(0) := u'_+(0)$. De même, $u \in \mathrm{C}^2([0, +\infty[)$ signifie que $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ et $u' \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$, où u' est définie en 0 dans le sens ci-dessus.

Exercice 3.

Trouver une fonction $v \in \mathrm{C}^1(]-1, 1[)$ qui ne s'annule qu'en 0 et qui vérifie pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln(1 + v(x)^2).$$

Exercice 4.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$; notons $I = [t_0, +\infty[$. Soient $f \in \mathrm{C}^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u : I \to \mathbb{R}$. Supposons que : (I) $u \in \mathrm{C}^0(I)$; (II) u est dérivable sur $\mathring{I} =]t_0, +\infty[$; et (III) $\forall t \in \mathring{I}$, $u'(t) = f(t, u(t))$. Démontrer que $u \in \mathrm{C}^1(I)$.