# Série 21 du lundi 5 mai 2025

## Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

2)

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}. \tag{1.2}$$

### Solution

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $D_k := \overline{\mathrm{B}}(0,k) \subset \mathbb{R}^2$. Remarquons que : (I) $D_k$ est un compact mesurable au sens de Jordan, (II) $D_k \subset \mathring{D}_{k+1}$, et (III) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k = \mathbb{R}^2$. Notons

$$I_k := \iint_{D_k} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{1.3}$$

Calculons $I_k$ en coordonnées polaires :

$$\forall (x,y) \in \mathring{D}_k \setminus \Big([0,k[\times\{(0,0)\}\Big),\ \exists!(r,\theta) \in ]0,k[\times]0,2\pi[, \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1.4}$$

Le jacobien de cette transformation définie entre deux ouverts est $(r,\theta) \mapsto r$. Comme $[0,k[\times\{(0,0)\}$ et $\partial D_k$ sont négligeables, l'intégrale sur $D_k$ vaut celle sur $\mathring{D}_k \setminus ([0,k[\times\{(0,0)\})$. Donc

$$\begin{aligned} I_k &= \iint_{]0,k[\times]0,2\pi[} \frac{\ln(1+r^2)}{(1+r^2)^2} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \iint_{[0,k]\times[0,2\pi]} \frac{\ln(1+r^2)}{(1+r^2)^2} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k \frac{\ln(1+r^2)}{(1+r^2)^2} r\, \mathrm{d}r = \pi \int_0^k \frac{\ln(1+r^2)}{(1+r^2)^2} 2r\, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Faisons le changement de variables $t = 1+r^2$, avec $\mathrm{d}t = 2r\, \mathrm{d}r$. On a alors

$$I_k = \pi \int_1^{1+k^2} \frac{\ln t}{t^2}\, \mathrm{d}t \overset{par\ parties}{=} \pi\Big[-\frac{1}{t}(1+\ln t)\Big]_{t=1}^{t=1+k^2} = \pi\Big(-\frac{1}{1+k^2} - \frac{\ln(1+k^2)}{1+k^2} + 1\Big). \tag{1.5}$$

Il en résulte que $\lim_{k\to\infty} I_k = \pi$. Puisque l'intégrande de (1.1) est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^2$, l'intégrale généralisée (1.1) est absolument convergente et sa valeur est $\pi$ :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi. \tag{1.6}$$

2) Pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, notons $R_k := [k^{-1},k]^2$. Remarquons que : (I) $R_k$ est un compact mesurable au sens de Jordan, (II) $R_k \subset \mathring{R}_{k+1}$, et (III) $\bigcup_{k\geqslant 2} R_k = ]0,+\infty[^2$. Notons

$$J_k := \iint_{R_k} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}. = \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_{\frac{1}{k}}^{k}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} \tag{1.7}$$

$$= \left([\arctan x]_{x=\frac{1}{k}}^{x=k}\right)^2 \tag{1.8}$$

$$= \left(\arctan k - \arctan\frac{1}{k}\right)^2. \tag{1.9}$$

Il en résulte que $\lim_{k\to\infty} J_k = (\pi/2)^2 = \pi^2/4$. Puisque l'intégrande de (1.2) est positive sur $]0,+\infty[^2$, l'intégrale généralisée (1.2) est absolument convergente et sa valeur est $\pi^2/4$ :

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{\pi^2}{4}. \tag{1.10}$$

# Exercice 2.

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction $I$ par

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Donner le domaine de définition de $I$.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction $J$ par

$$J(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{2.2}$$

Donner le domaine de définition de $J$.

## Solution

1) Soit $R \in ]0,+\infty[$ ; notons

$$I_R(\alpha) := \int_{\mathrm{B}(0,R)} \frac{1}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Calculons en passant en coordonnées polaires :

$$I_R(\alpha) = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{r}{(1+r)^\alpha} \,\mathrm{d}\theta \tag{2.4}$$

$$= 2\pi \int_0^R r(1+r)^{-\alpha} \,\mathrm{d}r \tag{2.5}$$

$$= \left[\frac{2\pi}{1-\alpha} r(1+r)^{1-\alpha}\right]_{r=0}^R - \frac{2\pi}{1-\alpha} \int_0^R (1+r)^{1-\alpha} \,\mathrm{d}r \tag{2.6}$$

$$= \frac{2\pi}{1-\alpha} R(1+R)^{1-\alpha} - \left[\frac{2\pi}{(1-\alpha)(2-\alpha)} (1+r)^{2-\alpha}\right]_{r=0}^R \tag{2.7}$$

$$= \frac{2\pi}{1-\alpha} R(1+R)^{1-\alpha} - \frac{2\pi}{(1-\alpha)(2-\alpha)} ((1+R)^{2-\alpha} - 1). \tag{2.8}$$

De plus

$$I_R(1) = 2\pi \int_0^R \frac{r}{1+r} \,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) \mathrm{d}r = 2\pi[r - \ln(1+r)]_{r=0}^R \tag{2.9}$$

$$= 2\pi(R - \ln(1+R)), \tag{2.10}$$

$$I_R(2) = 2\pi \int_0^R \frac{r}{(1+r)^2} \,\mathrm{d}r = -2\pi\left[\frac{r}{1+r}\right]_{r=0}^R + 2\pi \int_0^R \frac{1}{1+r} \,\mathrm{d}r \tag{2.11}$$

$$= -2\pi \frac{R}{1+R} + 2\pi \ln(1+R). \tag{2.12}$$

D'après (2.8), (2.10) and (2.12), $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$ existe si et seulement si $\alpha > 2$. Puisque la fonction $(x,y) \mapsto (1 + \sqrt{x^2+y^2})^{-\alpha}$ est positive, elle est absolument intégrable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > 2$.

2) Soit $R \in \,]0, +\infty[$ ; notons

$$J_R(\alpha) := \int_{\overline{\mathrm{B}}(0,R)} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^\alpha} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z. \tag{2.13}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$. Calculons en passant en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
J_R(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \left( \int_0^\pi \frac{r^2 \sin\varphi}{(1+r)^\alpha} \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r && (2.14)\\
&= \left( \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \left( \int_0^\pi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \right) \left( \int_0^R \frac{r^2}{(1+r)^\alpha} \,\mathrm{d}r \right) && (2.15)\\
&= 4\pi \int_0^R r^2 (1+r)^{-\alpha} \,\mathrm{d}r && (2.16)\\
&= \frac{4\pi}{1-\alpha} R^2 (1+R)^{1-\alpha} - \frac{4\pi}{1-\alpha} \int_0^R 2r(1+r)^{1-\alpha} \,\mathrm{d}r && (2.17)\\
&= \frac{4\pi}{1-\alpha} R^2 (1+R)^{1-\alpha} - \frac{8\pi}{(1-\alpha)(2-\alpha)} R(1+R)^{2-\alpha} \\
&\qquad + \frac{8\pi}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \int_0^R (1+r)^{2-\alpha} \,\mathrm{d}r && (2.18)\\
&= \frac{4\pi}{1-\alpha} R^2 (1+R)^{1-\alpha} - \frac{8\pi}{(1-\alpha)(2-\alpha)} R(1+R)^{2-\alpha} \\
&\qquad + \frac{8\pi}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} \left( (1+R)^{3-\alpha} - 1 \right). && (2.19)
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
J_R(1) = 4\pi \int_0^R \frac{r^2}{1+r} \,\mathrm{d}r &= 4\pi \int_0^R \frac{(1+r)^2 - 2(1+r) + 1}{1+r} \,\mathrm{d}r && (2.20)\\
&= 4\pi \left( R + \frac{R^2}{2} - 2R + \ln(1+R) \right), && (2.21)
\end{aligned}$$

$$J_R(2) = -4\pi \frac{R^2}{1+R} + 8\pi \int_0^R \frac{r \,\mathrm{d}r}{1+r}$$

$$= -4\pi \frac{R^2}{1+R} + 8\pi \int_0^R \left( 1 - \frac{1}{1+r} \right) \mathrm{d}r = -4\pi \frac{R^2}{1+R} + 8\pi (R - \ln(1+R)), \tag{2.22}$$

(2.23)

$$\begin{aligned}
J_R(3) &= -2\pi \frac{R^2}{(1+R)^2} - 4\pi \frac{R}{1+R} + 4\pi \int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{1+r} && (2.24)\\
&= -2\pi \frac{R^2}{(1+R)^2} - 4\pi \frac{R}{1+R} + 4\pi \ln(1+R). && (2.25)
\end{aligned}$$

D'après (2.19), (2.21), (2.22), et (2.25), $\lim_{n \to +\infty} J_n(\alpha)$ existe si et seulement si $\alpha > 3$. Puisque la fonction $(x, y, z) \mapsto (1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^{-\alpha}$ est positive, elle est absolument intégrable sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\alpha > 3$.

# Exercice 3.

1) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, notons $K_j := [-j, j]^2$. Prouver l'existence de

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{K_j} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

où la fonction $s \mapsto \frac{\sin s}{s}$ est étendue par continuité en 0 en lui assignant la valeur 1 en 0.

2) A-t-on

$$\sup \left\{ \int_K \left| \frac{\sin x \sin y}{xy} \right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y : K \subset \mathbb{R}^2 \text{ compact Jordan-mesurable non vide} \right\} < +\infty\,?$$

## Solution

1) Soit $j \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_{K_j} \frac{\sin x \sin y}{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-j}^{j} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \int_{-j}^{j} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y = 4 \int_0^j \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \int_0^j \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y.$$

Considérons $\int_0^j \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ (qui vaut $\int_0^j \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y$). Si $j > 1$, l'intégrale sur $[0, 1]$ ne pose pas de difficulté car l'intégrande est continue sur $[0, 1]$ (après extension) : $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ est un réel indépendant de $j$. Ensuite on intègre sur $[1, j]$ par partie pour faire apparaître un $\frac{1}{x^2}$ :

$$\int_1^j \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \left[ \frac{-\cos x}{x} \right]_1^j - \int_1^j \frac{\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

et on obtient que toutes les limites lorsque $j \to +\infty$ existent.

2) La réponse est « non » ; prouvons-le.
Pour tout entier $k \geqslant 2$, soit $B_k = [\pi, k\pi]^2$. Alors

$$\int_{B_k} \left| \frac{\sin x \sin y}{xy} \right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin y|}{y} \, \mathrm{d}y = \left( \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x \right)^2.$$

D'après un résultat d'analyse 1, $\lim_{k \to +\infty} \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x = +\infty$ et donc

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{B_k} \left| \frac{\sin x \sin y}{xy} \right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = +\infty.$$

# Exercice 4.

Notons $D := \overline{B}(\mathbf{0}, 1)$ et $f$ la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Nous voulons vérifier si l'intégrale $\int_D f$ existe.

1) Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_{+*}$ ; notons $C_\epsilon := \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus B(\mathbf{0}, \epsilon)$. $f$ est-elle intégrable sur $C_\epsilon$ ? Si oui, donner $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} f$.

2) Soient $\epsilon \in \mathbb{R}_{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ; notons $A(\epsilon, \alpha) = A^+(\epsilon) \cup A^-(\epsilon, \alpha)$ avec

$$\begin{aligned} A^+(\epsilon) &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : \epsilon^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\} \\ \text{et} \;\; A^-(\epsilon, \alpha) &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{-*} : \alpha^2\epsilon^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}. \end{aligned}$$

Donner les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{A(\epsilon, \alpha)} f$ existe.

3) Conclure quant à l'existence de $\int_D f$.

## Solution

1. la solution est 0. C'est facile de vérifier apres le changement de variables en coordenées polaaires, puisque $\sin(\theta)$ es une fonction impaire. Donc, oui, $f$ est integrable sur $C_\epsilon$.

2. Prenons maintenant la suite de domaines

$$D_\epsilon = D_\epsilon^+ \cup D_\epsilon^- \qquad \text{où} \quad \begin{cases} D_\epsilon^+ = \{\epsilon^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, \;\; y \geqslant 0\}, \\ D_\epsilon^- = \{\alpha^2\epsilon^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, y < 0\}. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \iint_{D_\epsilon} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \iint_{D_\epsilon^+} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{D_\epsilon^-} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi \int_\epsilon^1 \frac{\sin \theta}{r^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta + \int_\pi^{2\pi} \int_{\alpha\epsilon}^1 \frac{\sin \theta}{r^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\ &= 2\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{\alpha\epsilon} - 1\right) = \frac{2}{\epsilon} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \end{aligned}$$

3. Donc,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \iint_{D_\epsilon} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1, \\ 0, & \alpha = 1, \\ -\infty, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

La limite $\lim_{\epsilon \to 0} \iint_{D_\epsilon} |f(x, y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ dépend de la suite des domaines $D_\epsilon$ choisis. Donc, la fonction n'est pas intégrable.