Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-05-05 au 2025-05-09

Série 21 du lundi 5 mai 2025

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

2)

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}. \tag{1.2}$$

Exercice 2.

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction I par

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

   Donner le domaine de définition de I.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction J par

$$J(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{2.2}$$

   Donner le domaine de définition de J.

Exercice 3.

1) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, notons $K_j \coloneqq [-j, j]^2$. Prouver l'existence de

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

   où la fonction $s \mapsto \frac{\sin s}{s}$ est étendue par continuité en 0 en lui assignant la valeur 1 en 0.

2) A-t-on

$$\sup\left\{\int_K\left|\frac{\sin x \sin y}{xy}\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y : K \subset \mathbb{R}^2 \text{ compact Jordan-mesurable non vide}\right\} < +\infty\,?$$

Exercice 4.

Notons $D := \overline{B}(\mathbf{0},1)$ et f la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}$$

Nous voulons vérifier si l'intégrale $\int_D f$ existe.

1) Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_{+*}$; notons $C_\epsilon := \overline{B}(\mathbf{0},1) \setminus B(\mathbf{0},\epsilon)$. f est-elle intégrable sur C_ϵ ? Si oui, donner $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f$.
2) Soient $\epsilon \in \mathbb{R}_{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$; notons $A(\epsilon,\alpha) = A^+(\epsilon) \cup A^-(\epsilon,\alpha)$ avec

$$\begin{aligned} A^+(\epsilon) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ : \epsilon^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\} \\ \text{et}\ \ A^-(\epsilon,\alpha) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{-*} : \alpha^2\epsilon^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}. \end{aligned}$$

   Donner les valeurs de α pour lesquelles $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{A(\epsilon,\alpha)} f$ existe.
3) Conclure quant à l'existence de $\int_D f$.