Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-04-28 au 2025-05-02

Série 20 du mercredi 30 avril 2025

Exercice 1.

Notons $D := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \in \,]1,2[\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.1}$$

Exercice 2.

Notons $D := \{(x,y) \in \,]0,+\infty[^2 : 9x^2+4y^2 < 36\}$. Calculer

$$\iint_D x^2 y^4 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Exercice 3.

Esquisser l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 4x,\, 1 \leqslant xy \leqslant 2\}$ et calculer l'intégrale double

$$\iint_D x^2\, y^2\, dx\, dy\,.$$

Exercice 4.

1) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifier que

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant 4\left(\int_0^r e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_{B(\mathbf{0},2r)} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 5.

Soit $a \in \,]0,1[$; notons $D(a) := [0,a]^2$. Définissons la fonction f pour tout $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$ par

$$f(x,y) := \frac{1}{1-xy}. \tag{5.1}$$

Notons $I(a) := \iint_{D(a)} f$.

1) En utilisant le changement de variables

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2}\right) =: (u,v), \tag{5.2}$$

exprimer $I(a)$ exclusivement avec des intégrales simples par rapport à u.

2) Montrer que $\lim_{a\to 1^-} I(a) = \pi^2/6$.

Rappel 1. Soit $u \in]-1,1[$.

$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin u \tag{5.3}$$

et

$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u. \tag{5.4}$$

On peut démontrer (5.4) en dérivant le membre de gauche et le membre de droite.